

李新洲 徐建军⊙著

现代数学及其应用



上海科学技术出版社



现代数学及其应用





www.ewen.cc　　www.sstp.cn

ISBN 7-5323-8336-9



定价：20.00元

现代数学及其应用

李新洲　徐建军　著

上 海 科 学 技 术 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

现代数学及其应用／李新洲，徐建军著．—上海：上海科学技术出版社，2006.3
ISBN 7-5323-8336-9

Ⅰ．现…　Ⅱ．①李…②徐…　Ⅲ．应用数学
Ⅳ．O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 146273 号

上海世纪出版股份有限公司
上海科学技术出版社 出版、发行
（上海钦州南路 71 号　邮政编码 200235）
新华书店上海发行所经销
常熟市文化印刷有限公司印刷
开本 850×1168　1/32　印张 6.125
字数 159 000
2006 年 3 月第 1 版
2006 年 3 月第 1 次印刷
印数 1－3 000
定价：20.00 元

内 容 提 要

本书是一部以应用为目的的现代数学著作，介绍了集合、拓扑、群、微分几何、非线性方程等现代数学的基础理论，并讨论了它们在现代物理学与天体物理学中的应用，特别是群在规范理论、同伦论在宇宙拓扑缺陷、非线性方程在宇宙学中的应用。其中含有作者在拓扑缺陷、宇宙动力学方面的工作。

本书首先介绍了集合、拓扑及分形的基础内容，以及这些数学概念的一些应用；其次讲述了有限群和李群在规范理论与相对论中的应用；再次介绍了微分流形、微分同胚、霍奇（Hodge）算子、同调群和同伦群，及它们在电磁场理论和天体物理中的应用；最后讨论了物理学、力学、地球科学、生命科学及各类工程技术领域中会遇到的各种各样的非线性方程，并讨论了在宇宙动力学中的应用。

本书主要适合数学、物理、天文和力学方面的研究生和科研人员阅读。

目　　录

（带*号的章节初学者可以略过，而不影响后面章节的阅读。）

第1章　集合与拓扑

集合与拓扑在近代数学的发展中起着极为重要的作用，也是学习现代数学的基础。可以说，数学在本质上就是研究集合上的各种结构以及关系的学科。本章将简要介绍集合论和拓扑空间的一些基本概念和基本性质。作为应用的例子，讨论了局中人集合，并在这些基础上叙述了阿罗(Arrow)不可能性定理。

§1.1　集合的基本概念

集合是一个古老的数学概念，但集合论真正成为一门严格的数学学科是从德国著名数学家康托尔(G. Cantor, 1845—1918)开始的。他曾这样来描述集合："所谓集合，是我们直觉中或理智中的、确定的、互不相同的事物的一个汇集，被设想为一个整体(单体)。"人们一度认为集合的概念是不需定义的，只要描述性地说明就可以了，但很快就发现这会引起一些悖论。

理发师悖论　小岛上唯一的理发师宣称：我为岛上所有不给自己理发的人理发，而不给那些为自己理发的人理发。那么，这位理发师该不该为自己理发呢？他实际上把岛上居民分成了两类，A 类是为自己理发的那部分居民，B 类是由不属于 A 类的人组成。在他的理发规则下，他不能为自己理发，也不能不为自己理发。即他不能属于 A 类，也不能不属于 A 类。

这个悖论是英国著名哲学家罗素(B. Russell, 1872—1970)在1903年提出的，曾经引发了数学史上的第三次危机(前两次危机是无理数的发现和无穷小量的定义)。理发师悖论告诉我们，集合的概念并没有想象中那么简单。集合论必须建立在一套公

理体系之上。

1. 集合的定义

定义 满足一定条件的若干个(有限或无限,离散或连续)对象的全体称为一个集合(set)。组成集合的对象称为集合的元素(element)。通常用大写字母 A, B, …表示集合,用小写字母 a, b, …表示集合的元素。用 $a \in A$ 来表示 a 是集合 A 的元素,而 $a \notin A$ 表示 a 不是集合 A 的元素。没有元素的集合称为空集,记作$\varnothing$。元素数目有限的集合称为有限集,有无限个元素的集合称为无限集。无限集又可分为可数集和不可数集。可以这样来表示一个集合,如由 ± 1, $\pm \mathrm{i}$ 构成的集合可记为

$$A = \{1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}, \tag{1.1}$$

或者

$$A = \{x \mid x^4 - 1 = 0, x \in \mathbf{C}\}。 \tag{1.2}$$

集合的类型可以是非常广泛的。比如"年龄在 20—25 岁之间的学生"可以组成一个集合;"银河系中的恒星"也可以组成一个集合。几个常用的数集见下例。

例 自然数集 $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$,可数集。

整数集 $\mathbf{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$,可数集。

有理数集 $\mathbf{Q} = \{p/q: p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0\}$,可数集。

实数集 $\mathbf{R}$,不可数集。

复数集 $\mathbf{C} = \{x + \mathrm{i}y: x, y \in \mathbf{R}\}$,不可数集。

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素,即 $x \in A \Rightarrow x \in B$,则称 A 为 B 的子集,记作 $A \subseteq B$。显然有 $A \subseteq A$。空集$\varnothing$是任何集合的子集。如果 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$,即集合 A 的元素都是集合 B 的元素,但集合 B 中至少有一个元素不属于 A,则称 A 为 B 的真子集,记作 $A \subset B$。如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$,则称集合 A 与集合 B 相等,$A = B$。

一个集合的所有子集也构成一个集合,称为集合 A 的幂集,

记作 2^A。例如设

$$A = \{a, b\}, \tag{1.3}$$

则其所有的子集构成的集合为

$$2^A = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \varnothing\}。 \tag{1.4}$$

可以证明，对于有限集，如果集合 A 有 n 个元素，则集合 2^A 具有 2^n 个元素。对于无限集，情况比较复杂，此处不予讨论。我们只指出一点，实数集 **R** 的元素数目要比整数集 **Z** 的元素数目“多”，幂集 2^A 的元素数目要比集合 A 的元素数目“多”，而有理数集 **Q** 的元素数目和整数集 **Z** 的元素数目“一样多”。一段实轴上的点的数目和平面上的点的数目也是“一样多”。

2. 集合的运算

我们把

$$A \cup B = \{x \in A \text{ 或者 } x \in B\} \tag{1.5}$$

称为集合 A 与集合 B 的并。这是集合的加法。并集是由两个集合的所有元素组成的集合。若 $A = \{a, b, c\}$，$B = \{c, d, e, f\}$，则

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}。 \tag{1.6}$$

而把

$$A \cap B = \{x \in A \text{ 且 } x \in B\} \tag{1.7}$$

称为集合 A 与集合 B 的交。这是集合的乘法。交集是由两个集合的共同元素组成的集合。如果 $A \cap B = \varnothing$，则称集合 A 与集合 B 互不相交。在上例中，

$$A \cap B = \{c\}。 \tag{1.8}$$

我们把

$$A - B = \{x \in A \text{ 且 } x \notin B\} \tag{1.9}$$

称为集合 A 与集合 B 的差。这是集合的减法。差集是由集合 A

中不属于集合 B 的元素组成的集合。对于上例,

$$A-B=\{a, b\}。 \tag{1.10}$$

这三种运算可用下列图形表示:

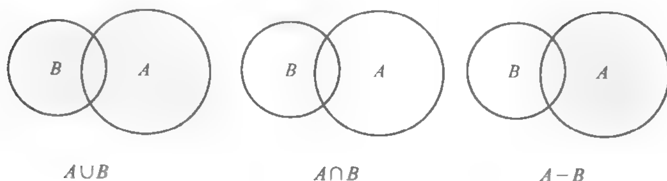


图 1.1

不难证明下列性质:

交换律

$$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A。 \tag{1.11}$$

结合律

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), \tag{1.12}$$

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)。 \tag{1.13}$$

分配律

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C), \tag{1.14}$$

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)。 \tag{1.15}$$

吸收律

$$(A\cup B)\cap A=A, (A\cap B)\cup A=A。 \tag{1.16}$$

对于差集运算,如果 A 是 X 的子集,则称差集 $X-A=A^c$ 为 A 关于 X 的补集。对于补集运算,有如下的德摩根(de Morgan)公式:

$$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c, \tag{1.17}$$

$$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c, \tag{1.18}$$

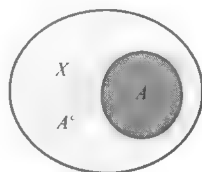


图 1.2

$$(A^c)^c = A, \tag{1.19}$$

$$A \cup A^c = X, \tag{1.20}$$

$$A \cap A^c = \varnothing。 \tag{1.21}$$

最后，定义集合的直积运算，若 $a \in A,\ b \in B$，则集合

$$C = A \times B = \{(a,\ b),\ a \in A,\ b \in B\}, \tag{1.22}$$

称为 $A,\ B$ 的有序对集合，也称为集合 $A,\ B$ 的直积。平面点的集合

$$\mathbf{R}^2 = \{(x_1,\ x_2),\ x_i \in \mathbf{R}\} \tag{1.23}$$

为实数集合 $\mathbf{R}$ 的二重直积 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$。一般地，有

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R} = \{(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n),\ x_i \in \mathbf{R},\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n\} \tag{1.24}$$

是实数集合 $\mathbf{R}$ 的 n 重积。

§1.2 映　射

设 A 和 B 是集合，如果存在一个对应关系或法则，使得对于 A 的任一元素 a，均有 B 中一个唯一的元素 b 与之相对应，则称这是一个从 A 到 B 的映射(map)f，记作

$$f: A \to B,\ a \to b = f(a)。 \tag{1.25}$$

把 A 称为映射 f 的定义域，而把 $f(A) = \{f(a): \forall a \in A\} \subseteq B$ 称为映射 f 的值域。同时，把 $b = f(a) \in B$ 称为 a 的象。

显然，A 的每一个元素都具有唯一的象，但反之则不一定。A 的所有元素的象的集合就是映射 f 的值域。映射是通常的函数(数集到数集的映射，如实数集 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射)概念的推广。映射比函数要宽泛得多，函数、变换、各种运算、泛函和算符等等均可视为映射。

设有映射

$$f:A \to B,$$

如果 $f(A)=B$，即 A 的所有的象的集合就等于 B，则称 f 为 A 到 B 上的映射，也称为满射。

如果 $f(a)=f(a') \Rightarrow a=a'$，则称 f 为单映射或 1-1 映射。如果 $A=B$，且对所有的 $a \in A$，有 $f(a)=a$，则称 f 为 A 的恒等映射。

如果 f 为 A 到 B 上的 1-1 映射，则称其为双射。如果 f 为 A 到 B 上的 1-1 映射，则对于 $b=f(a)$，可以确定 $a=f^{-1}(b)$，由此可以确定映射 $f^{-1}:B \to A$。称 f^{-1} 为 f 的逆映射。逆映射是反函数的推广。

两个相继的映射可以复合为一个映射：如果

$$f:A \to B,\ g:B \to C, \tag{1.26}$$

则

$$h = g \circ f:A \to C \tag{1.27}$$

称为 f 和 g 的一个复合映射。复合映射是复合函数的推广。显然，

$$f^{-1} \circ f = I_A:A \to A \tag{1.28}$$

或

$$f \circ f^{-1} = I_B:B \to B \tag{1.29}$$

为恒等映射。映射的结合满足结合律。

如果有映射

$$f:A \to B;\ g:B \to C;\ h:C \to D, \tag{1.30}$$

则

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f:A \to D。 \tag{1.31}$$

有不少数学问题需要比较两个集合所含元素的多少。通常把一个集合 A 所含的元素数目称为该集合的基数或集合的势，记为 $|A|$。对于有限集，问题比较容易解决，无限集就比较复杂。不

过,也可以这样来考虑,将两个集合的元素作 1-1 对应,如果正好完全 1-1 对应,那么就说这两个集合所含的元素数一样多。更准确地说,设有 A, B 两个集合,若存在 1-1 到上的映射 $f:A\to B$,则说 A, B 两个集合有相同的基数。如果是 1-1 映射,则约定 $|A|\leqslant|B|$。如果 $|A|\leqslant|B|\neq|A|$,则说 A 的基数小于 B 的基数。记作 $|A|<|B|$。和自然数集 $\mathbf{Z}$ 具有相同基数的集合称为可数集。自然数集 $\mathbf{N}$ 的基数用 $\aleph_0$ 表示,即 $|\mathbf{N}|=|\mathbf{Z}|=|\mathbf{Q}|=\aleph_0$。可以证明,可数个可数集的并及有限个可数集的交是可数集。实数集 $\mathbf{R}$ 的基数用 $\aleph_1$ 表示,即 $|\mathbf{R}|=\aleph_1$, $\aleph_1>\aleph_0$。可以证明,自然数集的幂集 2^N 和实数集 $\mathbf{R}$ 具有相同的基数,即 $|2^N|=|\mathbf{R}|=\aleph_1$。一般地可以证明, $|2^A|>|A|$。

§1.3 拓扑空间

1. 几个著名的拓扑学问题

(1) 哥尼斯堡(Königsberg)七桥问题

流经哥尼斯堡的普雷格河的河湾处有两个小岛,七座桥连接了两岸和小岛。当地流传着一个游戏,要求在一次散步中通过每座桥一次,但很长时间里没人能做到。后来大数学家欧拉(L. Euler)研究了这个游戏,他把这个游戏简化为一笔画问题:点代表陆地,线代表桥。能否完成游戏就变成左边的图形能否一笔画出的问题了。欧拉在 1736 年证明,这个图形是不能一笔画出来的。正是七桥问题和其他类似性质的问题,使欧拉和其他数学家开始认识到,存在着某种新的几何性质,与以往研究的几何性质完全不同。这种认识是拓扑学产生的背景。这种新的性质是一种整体结构的性质,它们与图形的大小、形状以及所含线

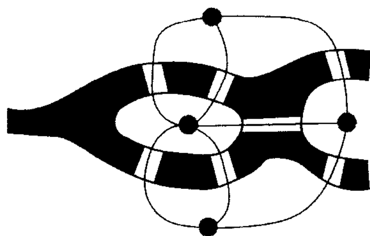


图 1.3

段的曲直等等都无关,我们称之为拓扑性质。将图形挤压、拉伸、扭曲等变形时,它的拓扑性质不变。研究图形拓扑性质的学科,就是拓扑学(topology)。

(2) 正多面体的欧拉示性数

对于正四面体、正六面体、正八面体等正多面体来说,如果用 V 标记它们的顶点数,E 标记棱数,F 标记面数,则有关系

$$V - E + F = 2, \tag{1.32}$$

这个公式称为欧拉公式。等式右边的数字 2 称为正多面体的欧拉示性数。这是一个拓扑性质。

(3) 四色定理

对地图着色时,要求相邻区域必须用不同颜色来标记,那么一共需要多少种颜色呢? 数学家很早就证明有五种颜色就够用了。而低于四种颜色是不可能标记一幅地图的。这个问题自从 1852 年格思里(F. Guthrie)提出后,一直到 20 世纪 70 年代借助计算机才得到了肯定的答案,即四色定理:给地图着色,四种颜色就够用了。地图着色问题也是一个和拓扑性质有关的问题,它与区域的面积、边界线的形状和长度等都没有关系,关键是区域的个数和彼此的连接关系。

2. 拓扑空间

设 X 是一个非空集合,记 2^X 为 X 的幂集,即由 X 的所有子集(包括空集$\varnothing$和 X 自身)组成的集合,把 2^X 的子集(即以 X 的一部分子集组成的集合)称为 X 的一个子集族。

定义 设 X 是一个非空集合,X 的一个子集族 τ 称为 X 的一个拓扑,如果它满足:

(1) X 和$\varnothing$都包含在 τ 中;

(2) τ 中任意多个成员的并集仍在 τ 中;

(3) τ 中有限多个成员的交集仍在 τ 中;

则集合 X 和它的一个拓扑 τ 一起称为一个**拓扑空间**(topological

space)，记作(X, τ)，有时候也简称为拓扑空间 X。称 τ 中的成员为这个拓扑空间的开集。定义中的三个条件称为拓扑公理。

从定义可以看到，给出集合的一个拓扑就是规定它的哪些子集是开集。这种规定不是任意的，必须满足三条拓扑公理。一般来说，一个集合上可以有许多不同的拓扑。因此在说到一个拓扑空间时，要同时指明集合及所规定的拓扑。

设 X 是一个非空集合，显然 $\tau = 2^X$ 构成 X 上的一个拓扑，称为 X 上的**离散拓扑**。离散拓扑的开集最多。而 $\tau = \{X, \varnothing\}$ 也是 X 上的拓扑，称为 X 上的**平凡拓扑**。平凡拓扑的开集最少。当 X 中包含多于一个元素时，这两个拓扑是不同的。X 还可以有许多别的拓扑。如果设 $X - \{a, b, c\}$，则$\{X, \varnothing, \{a\}\}$，$\{X, \varnothing, \{a, b\}\}$，$\{X, \varnothing, \{a\}, \{a, b\}\}$等等都是 X 上的拓扑。总共可以有 29 种不同的拓扑结构。但$\{X, \varnothing, \{a\}, \{b\}\}$不是 X 上的拓扑，因为公理(2)不满足。

设 τ_1，τ_2 是集合 X 上的两个拓扑，如果 $\tau_1 \subset \tau_2$，则说 τ_2 是比 τ_1 精细的拓扑。因此平凡拓扑是最粗的拓扑，离散拓扑则是最细的拓扑。

例 设 $\mathbf{R}$ 是全体实数的集合，规定

$$\tau_e = \{U \mid U \text{ 是若干个开区间的并集}\}, \tag{1.33}$$

这里“若干”可以是有限个、无限多个，也可以是零，因此 $\varnothing \in \tau_e$。所以 τ_e 是 $\mathbf{R}$ 上的拓扑，称为 $\mathbf{R}$ 上的**欧氏拓扑**，记为 $\boldsymbol{E}^1 = \{\mathbf{R}, \tau_e\}$。

3. 度量空间

集合 X 上的一个度量 d 是一个映射 $d: X \times X \to \mathbf{R}$，满足

(1) 正定性，$d(x, x) = 0$, $\forall x \in X$, $d(x, y) > 0$，当 $x \neq y$；

(2) 对称性，$d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in X$；

(3) 三角不等式，$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$, $\forall x, y, z \in X$。

当集合 X 上规定了一个度量 d 后，就称为度量空间，记作(X, d)。

记

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \cdots, n\}, \tag{1.34}$$

规定 $\mathbf{R}^n$ 上的度量 d 为

$$d(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right]^{1/2}。 \tag{1.35}$$

不难证明 d 满足度量空间的三个条件。因此 $\boldsymbol{E}^n = \{\mathbf{R}^n, d\}$ 是度量空间，称为 n 维**欧氏空间**。

设(X, d)是一个度量空间，$x_0 \in X$，ε 是一个正数。称 X 的子集

$$B(x_0, \varepsilon) = \{x \in X \mid d(x_0, x) < \varepsilon\} \tag{1.36}$$

为以 x_0 为中心、以 ε 为半径的球形邻域。因此

$$\tau_d = \{U \mid U \text{ 是若干个球形邻域的并集}\} \tag{1.37}$$

是 X 上的一个拓扑，称为 X 上由度量 d 决定的**度量拓扑**。每个度量空间都可以看成是具有度量拓扑的拓扑空间。因此 n 维欧氏空间 $\boldsymbol{E}^n$ 也是拓扑空间(其度量拓扑称为欧氏拓扑)。从这个意义上讲，拓扑空间是度量空间和欧氏空间的推广。

4. 连续映射和同胚

现在来考虑拓扑空间$(X, \tau(X))$和$(Y, \tau(Y))$之间的映射。正如映射是函数的推广一样，连续映射也是连续函数的一种推广。这里用开集来定义拓扑空间中的连续映射。

定义 设$(X, \tau(X))$和$(Y, \tau(Y))$为两个拓扑空间，$f: X \to Y$ 为一个映射，如果它满足：

$$f^{-1}(\tau(Y)) \subset \tau(X), \tag{1.38}$$

即 Y 的任一开集 $O \in \tau(Y)$ 的逆象 $f^{-1}(O)$是 X 的开集，$f^{-1}(O)$

$\in \tau(X)$，则称 f 是**连续映射**。这是通常连续函数定义的推广。恒等映射是连续映射，连续映射的复合映射也是连续映射。如果 X 是离散拓扑空间，或者 Y 是平凡拓扑空间，则 $f: X \to Y$ 一定是连续映射。对于普通函数 $f(x)$ 在一点 x_0 的连续，我们可以用 $\varepsilon - \delta$ 语言来描述：

对任意正数 $\varepsilon > 0$，总可以找到 $\delta > 0$，使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时，

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon。\tag{1.39}$$

我们也可以用开集的语言来描述函数在一点的连续：

若 V 是包含 $f(x_0)$ 的开集，则存在包含 x_0 的开集 U，使得

$$f(U) \subset V。\tag{1.40}$$

定义 如果存在一个 1-1 的映射(双射)$f: X \to Y$，使得 f 和 f^{-1} 都是连续的，则称这两个拓扑空间 $(X, \tau(X))$ 和 $(Y, \tau(Y))$ 是(拓扑)同胚的(homeomorphic)，此时称 f 为**同胚映射**。如果 X 与 Y 同胚，则记为 $X \cong Y$。

两个同胚的拓扑空间是拓扑等价的，具有相同的拓扑性质。同胚意味着可以通过连续的形变从一个拓扑空间到另一个拓扑空间。

同胚是拓扑学中最重要的概念之一。拓扑空间之间的同胚是一种等价关系。拓扑不变量就是在同胚变换下保持不变的一些量或性质。任意开区间 (a, b) 同胚于 $\mathbf{R}$，去掉北极的球面与平面同胚。这就是复变函数中球极投影的原理。但环面与球面不同胚，环形带与墨比乌斯(Möbius)带也不同胚。

5. 拓扑空间的几个基本概念

邻域 给定 X 上的一个拓扑 τ，如果 $A \subset X$ 是 X 的一个子集，且 A 包含一些开集 X_α，$x \in X_\alpha$，则称 A 为 $x \in X$ 的一个邻域。显然，包含 x 的开集 X_α 是 x 的邻域。

闭集 拓扑空间 X 的一个子集 A 称为闭集，如果 A 的余集

是开集。也就是说，开集的余集是闭集，闭集的余集是开集。在离散拓扑空间中，由于任何子集都是开集，因此任何子集也都是闭集。显然，在任何拓扑空间，X 本身和空集 $\varnothing$ 一定是闭集。容易证明，任意多个闭集的交集是闭集，有限个闭集的并也是闭集。

内点和边界点 设 $A\subset X$ 是 X 的一个子集，$x\in A$，如果存在开集 U 使得 $x\in U\subset A$，则称 x 是 A 的一个内点。A 的所有内点的集合称为 A 的内部或内域。如果点 x 的每个邻域都既包含 A 的点，也包含 A 的余集的点，则称 x 为 A 的边界点。A 的所有边界点的集合成为 A 的边界。若 A 的边界不包含在 A 内，则 A 为开集。若 A 的边界包含在 A 内，则 A 为闭集。

豪斯多夫(Hausdorff)空间 如果一个拓扑空间中，两个任意不同的点有彼此不相交的邻域，则称此拓扑空间为豪斯多夫空间。$\mathbf{R}$ 上的普通拓扑是豪斯多夫空间。离散拓扑也是豪斯多夫空间。

紧致性 紧致性是拓扑学中的一个重要概念。首先引入覆盖的概念。给定一族集合 $\{F_\alpha\}=F$，如果 $\bigcup F_\alpha\supset X$，就称 F 是 X 的一个覆盖。如果所有的 F_α 都是开集，就称为是开覆盖。一个集合 X 可以有很多种覆盖。如果对每一个开覆盖 $\{F_\alpha\}=F$ 都存在有限的子覆盖 $\{F_1, \cdots, F_n\}$，使得 $F_1\cup\cdots\cup F_n\supset X$，则称集合 X 是紧致的。紧致的直观解释就是有限。一个拓扑空间如果只含有限个点，或它的拓扑是有限的(只包含有限个开集)，则它是紧致的。有界闭区间是紧致的，球面 S^n 也是紧致的。

连通性 连通性是一个很直观的概念。如果拓扑空间 X 可以分解成两个不相交的开子集 A_1，A_2 的交，$A_1\cup A_2=X$，则称 X 是不连通的。因为 A_1，A_2 在 X 中互为余集，故它们既是开集，又是闭集。因此，如果一个拓扑空间中仅有的既开又闭的子集是空集 $\varnothing$ 和 X 本身，则它是连通的。显然离散点集是不连通的。有理数集 $\mathbf{Q}$ 不是连通的。可以有单连通和多连通(复连通)。R^n 和 S^n 是单连通的，T^n 则是多连通的。直观上可以看到，球面和环面(轮胎)是不同的。

§1.4 分　形

1. 分形的基本概念

在很长的时间内，数学只研究比较光滑和比较规则的集合和函数。而那些不够光滑和不够规则的集合和函数则被认为是病态的，不值得去研究。著名物理学家狄拉克(P. A. M. Dirac)提出的 δ 函数也曾被数学家认为是不严格的东西，但以后却由此发展出了广义函数理论。从 20 世纪 60 年代开始，人们逐渐认识到，对这些不光滑集可以而且必须进行详细的数学描述。不规则集比经典的几何图形能更好地反映自然现象。分形目前已经在包括数学、物理、化学、生物、天文和计算机等众多学科领域内得到了广泛的应用。在湍流、混沌等现象中都有分形的存在。

分形(fractal)这个词是它的创始人、美国数学家芒德布罗(B. Mandelbrot)教授于 1975 年夏天一个寂静的夜晚，在冥思苦想之余翻看儿子的拉丁文字典时想到的，其拉丁文的原意是"产生无规则的碎片"。分形的一个重要性质叫作自相似性。从它的任何一个局部经过放大，都可以得到一个和整体全等的图形。三分康托尔集 F 是一种最简单、最容易构造的分形，但它显示了许多最典型的分形特征。三分康托尔集是从单位区间出发，通过一系列不断去掉部分子区间的过程构造出来的。设 E_0 是闭区间[0, 1]，E_1 是表示由 E_0 除去中间 1/3 后得到的集合，即 $E_1=\{[0, 1/3]\cup[2/3, 1]\}$，再分别去掉这两个区间的中间 1/3 就得到 E_2。按此方法继续下去，得到由 2^k 个长度各为 3^{-k} 的区间组成的集合 E_k。三分康托尔集 F 可以看成是集序列 E_k 当 k 趋于无穷时的极限。

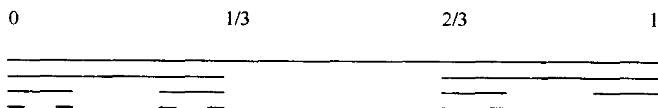


图 1.4

集合 F 具有如下一些性质，许多分形都具有类似的性质。

(1) F 是自相似的，在区间[0, 1/3]和[2/3, 1]内 F 的部分与 F 是相似的，相似比为1/3。即将[0, 1/3]内 F 的部分放大3倍后就得到整个 F。依此类推，康托尔集包含有许多不同比例的与自身相似的样本。

(2) F 具有精细结构，即它包含有任意小比例的细节。

(3) F 的定义简单，但具有错综复杂的细节结构。

(4) F 是通过一个反复的迭代过程得到的。

在构造 F 的过程中虽然去掉了大量的点，但可以证明 F 是一个不可数的无限集。

第二个例子，科赫(Koch)曲线，可以通过如下方式迭代得到。从单位长度的直线段出发，每次除去直线段中间的1/3线段，代之以底边在被除去的线段上的等边三角形的另两条边。最后得到的极限曲线称为科赫曲线。



图 1.5

科赫曲线在许多方面的性质与三分康托尔集的性质类似，如自相似和任意小比例的细节。另外，可以证明科赫曲线的长度是无穷大。三条科赫曲线可以构成科赫雪花曲线。这儿我们看到一

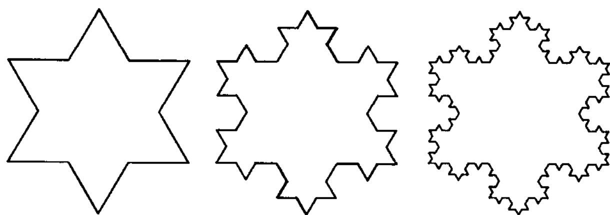


图 1.6

个以前没有遇到过的现象，闭合曲线的长度为无限大，但其所围图形的面积是有限的！

谢尔宾斯基(Sierpinski)垫是从一个初始的等边三角形出发，反复去掉小等边三角形得到的。

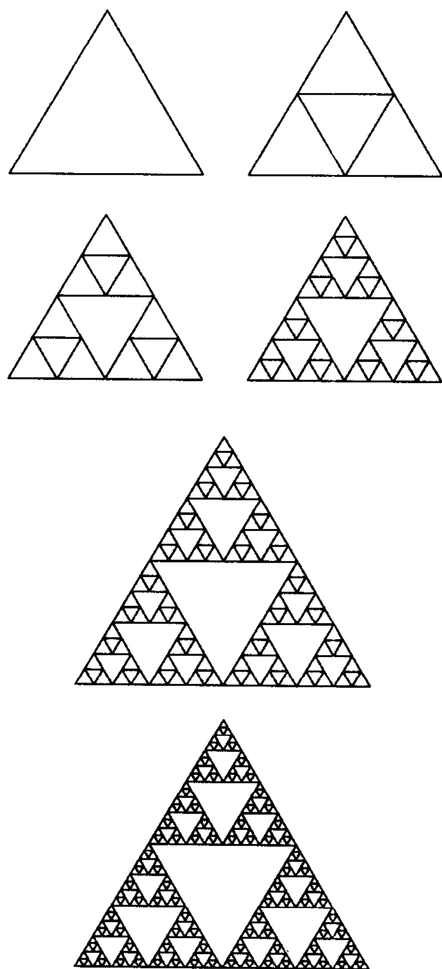


图 1.7

2. 分形生成的过程

这些分形是以一种确定的方式构造出来的，因而被称为确定性分形。如果在构造过程中引入某种随机性，则它们就不再具有严格的自相似性，但仍具有无限小的细节，如无规行走、布朗运动等。这些被称为随机分形。

另一种较复杂的分形图形称为朱利亚(Julia)集，它是单变量复变函数如 $f(z) = z^2 + C$ (C 为适当的常数)在平面上构造的点集。朱利亚集没有严格的自相似性，但具有拟自相似性，即任意小的部分可以放大，然后平滑地变形使之与这个集的某一较大的部分相一致。朱利亚集具有异常美丽的形状，利用朱利亚集可以模拟出山峰、云彩、湖泊等自然景观，下面的图形就是朱利亚集的图形。

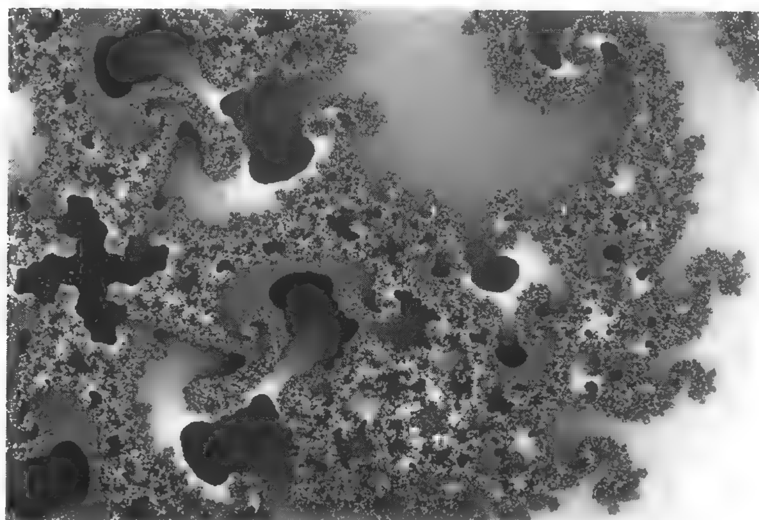


图 1.8

最千奇百怪的是芒德布罗集，从一个原始图形出发，每一个细部都可以演绎出绮丽无比犹如梦中仙境般的图形。芒德布罗集堪

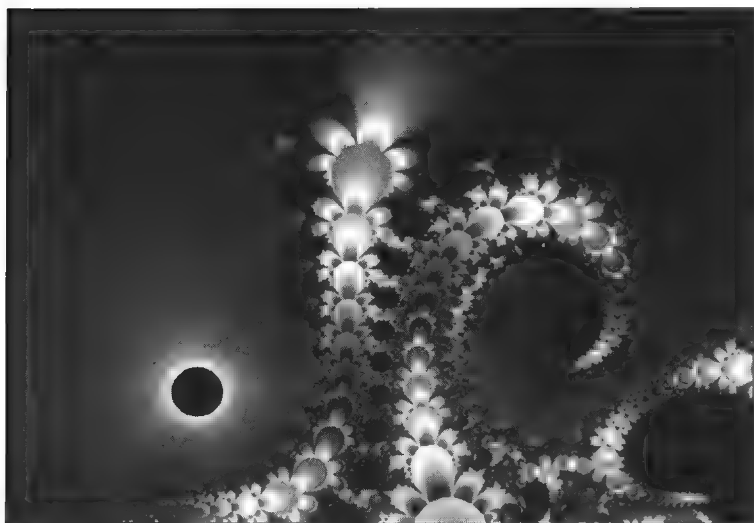


图 1.9

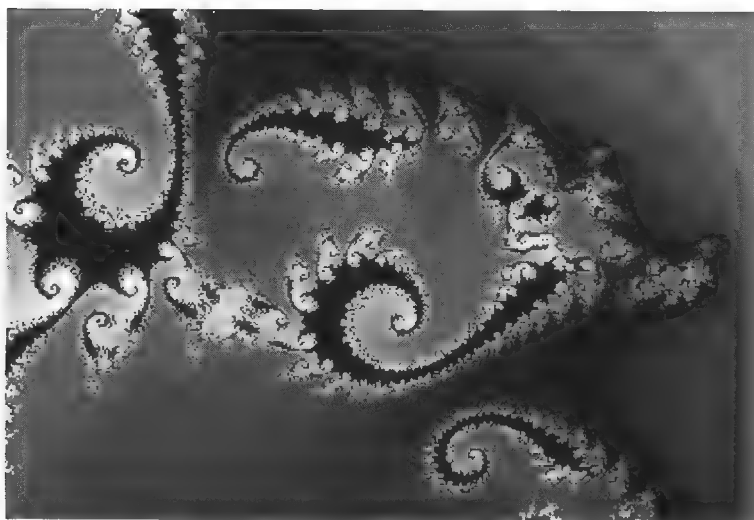


图 1.10

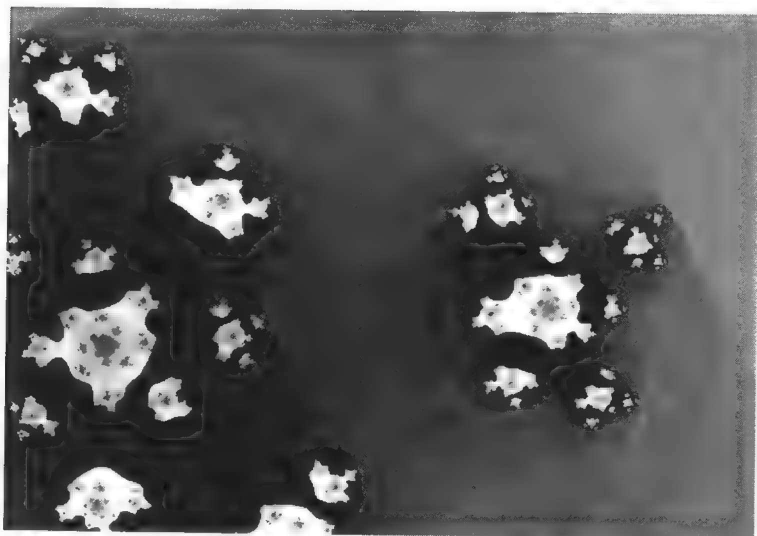


图 1.11

称人类有史以来做出的最奇异、最瑰丽的几何图形。这个点集均出自公式：$Z_{n+1}=Z_n^2+C$，这是一个迭代公式，式中的变量都是复数。这是一个大千世界，从此出发可以产生无穷无尽的美丽图案，这是芒德布罗教授在20世纪70年代发现的。只要计算的点足够多，不管把图案放大多少倍，都能显示出更加复杂的局部。这些局部既与整体不同，又有某种相似的地方，这些梦幻般的图案具有无穷无尽的细节和自相似性。芒德布罗教授称此为"魔鬼

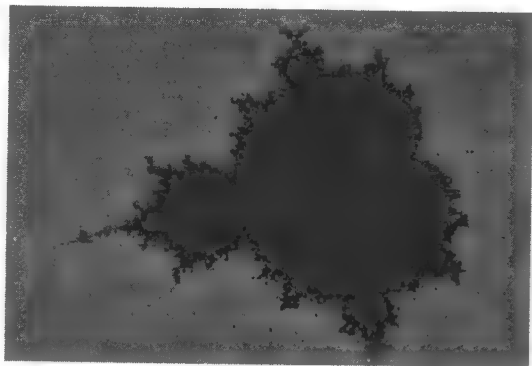


图 1.12

的聚合物”。为此，芒德布罗在 1988 年获得了“科学为艺术大奖”。在下述图形中，后一个图均是前一个图的某一局部放大。

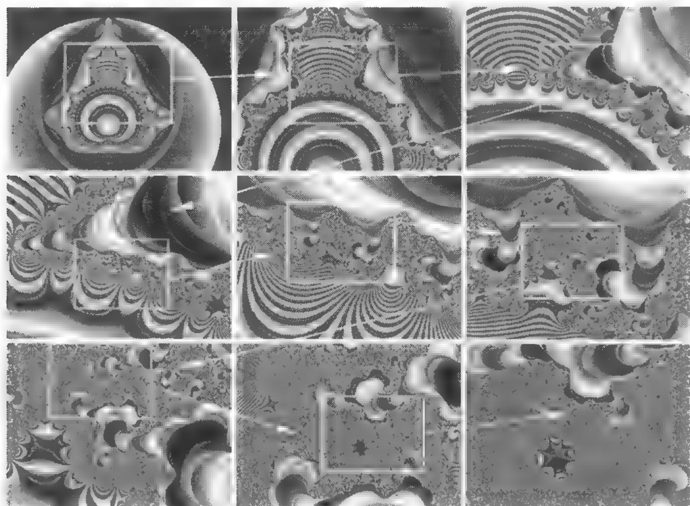


图 1.13

3. 分形的维数

豪斯多夫最早在 1919 年就提出了分数维的概念，并创立了豪斯多夫测度和维数理论。我们知道，对于欧氏几何，如果曲线的长度放大 λ 倍，则平面图形的面积放大 λ^2 倍，三维立体图形的体积放大 λ^3。分形的维数可以用多种方法定义。我们可以把分形看成是嵌在欧氏空间的点集，要确定其维数，关键是如何测量该点集的大小。最简单的办法是用线元、面元或体元去覆盖。一条有限长的曲线段可用线元 δ 去覆盖，如果用 $N(\delta)$ 覆盖便穷尽了整个线段，便可记

$$L = N(\delta)\delta \to L_0\delta^0 \ (\delta \to 0)。 \tag{1.41}$$

显然，当 $\delta \to 0$ 时，L_0 便代表曲线段的长度。如果用面元 δ^2 去覆盖

曲线段，则可以形式上写出与曲线段相联系的面积的大小

$$L_A = N(\delta)\delta^2 \to L_0\delta^1 \ (\delta \to 0)。\tag{1.42}$$

同样可以写出与之相联系的体积的大小

$$L_V = N(\delta)\delta^3 \to L_0\delta^2 \ (\delta \to 0)。\tag{1.43}$$

显然，对一条曲线来说，它的面积和体积均为 0。类似地，对一个曲面，可以分别用线元、面元和体元去覆盖，得出与之相联系的长度、面积和体积：

$$A_L = N(\delta)\delta \to A_0\delta^{-1} \ (\delta \to 0),\tag{1.44}$$

$$A \ \ = N(\delta)\delta^2 \to A_0\delta^0 \ (\delta \to 0),\tag{1.45}$$

$$A_V = N(\delta)\delta^3 \to A_0\delta^1 \ (\delta \to 0)。\tag{1.46}$$

当 $\delta \to 0$ 时，测得的面积为 A_0，而与之相联系的曲线长度为∞，体积为 0。这与我们已有的几何概念相符。如果对某个点集能写出

$$M_d = N(\delta)\delta^d \to \begin{cases} 0, 当\ d > d_f \\ 有限值, 当\ d = d_f, \\ \infty, 当\ d < d_f \end{cases}\tag{1.47}$$

就把 d_f 称为集合 S 的分形维数。由此可以求出分形的维数来。

$$M_d = N(\delta)\delta^{d_f} = 有限数 \to N(\delta) \propto \delta^{-d_f},$$

所以

$$d_f = \frac{\ln N(\delta)}{-\ln \delta} + \frac{有限数}{-\ln \delta} \to \frac{\ln N(\delta)}{-\ln \delta}。\tag{1.48}$$

还可以利用分形的自相似性来定义和计算分形的维数。具有自相似结构的对象，它的均匀分布的质量满足如下方程：

$$M(\lambda l) = \lambda^{d_f} M(l) = KM(l),\tag{1.49}$$

其中 $M(l)$是线度为 l 时的对象质量，$M(\lambda l)$是放大 λ 倍后的质量。由此可以得到

$$d_f = \frac{\ln K}{\ln \lambda}。 \tag{1.50}$$

两种方式得到的分形维数是一致的。

分形维数通常不是整数，在特殊情况下也可能是整数，一般总是小于所嵌入的欧氏空间的维数。下面讨论几个例子。

例 1 三分康托尔集

取[0, 1/3]段，将尺度放大 $\lambda = 3$ 倍，便得到原来的康托尔集，同样，对[2/3, 1]段放大 3 倍后也得到整个康托尔集，因此，有 $\lambda = 3$, $K = 2$, 因此

$$d_f = \frac{\ln K}{\ln \lambda} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.630\,9。 \tag{1.51}$$

例 2 科赫曲线

将其中的一段放大 $\lambda = 3$ 倍后，得到整个曲线，即放大后的质量为原来的 4 倍，因此

$$d_f = \frac{\ln K}{\ln \lambda} = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.261\,9。 \tag{1.52}$$

例 3 谢尔宾斯基垫

将尺度放大 2 倍后，得到原来的谢尔宾斯基垫，即质量增大为原来的 3 倍，所以

$$d_f = \frac{\ln K}{\ln \lambda} = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1.585。 \tag{1.53}$$

§1.5* 局中人集合

1. 基本概念

在前面几节中，我们已经熟悉了集合与拓扑的一些基本概念。很多应用问题可以由参与者集合与参与者特定子集有关联的数值来描述。在政治、经济和商业等领域，或运筹学、社会科学和环境科学等学科中，都能找到这样的应用。从应用角度来看，从参与者

或局中人集合出发是方便的。局中人集合可以是普通游戏中的局中人，也可以是国家的联盟、评审委员会成员、学生会和商业集团等等。一个局中人子集有时也称为一个联盟，可以用一个实数方便地表示联盟的值。这种值可以是普通游戏中的得分，也可以是经济效益、政治影响、社会地位和财富收入等等的度量。

用自然数 $1, 2, \cdots, n$ 给局中人编号，即用

$$N = \{1, 2, \cdots, n\} \tag{1.54}$$

来表示所有局中人的集合，联盟 S 是 N 的子集，$S \subset N$。所有子集的集合用 2^N 表示。

将实数 $v(S)$ 分配到 N 的每一个联盟 S 的映射称为特征函数，可以表示为

$$v: 2^N \to R, \tag{1.55}$$

对于空集 $\varnothing$，取 $v(\varnothing) = 0$。这些概念是由冯·诺伊曼(J. von Neumann)等人在他们的名著《博弈论与经典行为》中首先引入的。

2. 简单例子

在实际问题中，人们必须确定 n 个局中人的集 N 和特征函数 $v(S)$ 以及问题的解。这并不是一件容易的事情。如果预先知道了 $v(S)$，则问题就会变得简单多了。事实上，有关 $v(S)$ 的信息，可以从有关谈判行为、公平对待、某类偏见以及联盟的动态形成等因素得到。例如，可以考虑下述的简单多数对策和否决权对策这样的特殊例子，从而了解 $v(S)$ 的作用。

首先考虑所谓的简单多数对策。三个局中人用 1, 2, 3 编号，两人或三人的联盟同意，就可以决定将 30 元钱怎样分配给三人。

$$2^N = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\},$$

特征函数为

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,$$
$$v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = v(\{1, 2, 3\}) = 30。\quad (1.56)$$

这个对策被称为三人简单对策或三人常和对策。一般地，如果对所有联盟 S，$v(S)+v(N-S)=v(N)$，则称为常和对策。局中人可以自由交流，达成他们所希望的一致协议。如果达不成协议，则谁都一无所获。三个人的分配可用行矢量 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)$ 来表示。x_i 是第 i 个局中人的所得。如果假定局中人不会一无所获，则有分配集

$$V = \{\boldsymbol{x}: x_1 + x_2 + x_3 = 30, x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0\}。\quad (1.57)$$

理论上产生的结果应有无穷多种(假定钱是无限可分的)，但实际上的结果应是(10, 10, 10)或(15, 15, 0)，(15, 0, 15)和(0, 15, 15)三种情形之一。前者是由对策的对称性决定的一种自然公平分配，后者表明两人(最小)取胜联盟将第三者排除的分配。

下面考虑否决权对策的例子。设特征函数为

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{2, 3\}) = 0,$$
$$v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{1, 2, 3\}) = 10。\quad (1.58)$$

在这个对策中，必须要有两人同意才能分配 30 元钱，但局中人 1 对任何决策都有否决权。这也可以看成是一个市场，局中人 1 有某件商品，如果他卖给局中人 2 或 3，就产生 30 元钱的价值。在实践中，局中人 1 试图挑起局中人 2 和 3 之间的矛盾，以便得到 $(30-\varepsilon, \varepsilon, 0)$ 或 $(30-\varepsilon, 0, \varepsilon)$ 的分配结果，其中 $\varepsilon \geqslant 0$。然而，如果局中人 2 和 3 结成联盟，这个同盟也享有否决权。因此，局中人 2 和 3 的对称性意味着可能的结果为 $(30-2\delta, \delta, \delta)$，其中 δ 的范围是 $0 < \delta < 15$。

为了引进对策中心的概念，我们讨论下述对策的特征函数：

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,$$
$$v(\{1, 2\}) = 24, v(\{1, 3\}) = 6, v(\{2, 3\}) = 5, \tag{1.59}$$
$$v(\{1, 2, 3\}) = 10。$$

在这个对策中，如果联盟$\{1, 2, 3\}$一致同意分配的方案，他们可以分配 30 元钱。同盟$\{1, 2\}$在 3 人中最多能分 24 元，同盟$\{1, 3\}$能分到 18 元，$\{2, 3\}$能分到 15 元。所有可能的分配是：

$$x_1 + x_2 + x_3 = 30, x_1 + x_2 + x_3 = 24,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 18, x_1 + x_2 + x_3 = 15, \tag{1.60}$$
$$(0, 0, 0)。$$

分配集

$$V = \{\boldsymbol{x}: x_1 + x_2 + x_3 = 30, x_i \geqslant 0, i = 1, 2, 3\}, \tag{1.61}$$

对于任何对策(N, v)，V 中所有满足

$$\sum_{i \in S} x_i \geqslant v(S), \forall S \subset N \tag{1.62}$$

的 x 的集合叫作对策的中心 C。在上述例子中，

$$C = \{\boldsymbol{x} \in A, x_1 + x_2 \geqslant 24, x_1 + x_3 \geqslant 18, x_2 + x_3 \geqslant 15\}。 \tag{1.63}$$

3. 交换市场

考虑一个简单的贸易市场，个体户们将自己的商品带到市场，又根据不同的需求将商品换回去。个体户群 $N = \{1, 2, \cdots, n\}$，用 $1, 2, \cdots, n$ 表示。有 m 种商品，个体户 i 带进市场的商品用 $S^i = (S_1^i, S_2^i, \cdots, S_m^i\}$ 表示，其中 S_j^i 是第 i 个个体户拥有第 j 种商品的原始数目。假定个体户 i 的效用函数为 u_i，效用函数用来表示局中人选择商品的倾向，函数 $u_i(x)$ 的定义域是对所有

能实现的商品分配的集合，即 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_m)$。当且仅当 $u_i(x)>u_i(y)$ 时，个体户 i 倾向于选择 x 而不是 y。此外，还假定 $u_i(x)$ 是连续的，并为凸函数，即对任意的 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$，有

$$u_i[\lambda x+(1-\lambda)y]\geqslant\lambda u_i(x)+(1-\lambda)u_i(y) \tag{1.64}$$

如果个体户能组成局中人联盟 $M\subset N$，M 中的个体户可以在他们之间将商品重新分配，满足守恒律

$$\sum_{i\in M}x^i=\sum_{i\in M}S^i, \tag{1.65}$$

其中 $x^i=(x_1^i, x_2^i, \cdots, x_m^i)$ 描述了第 i 个个体户的商品分布。再设群体效应是它的成员的效应和，则联盟的目的是选择 x^i，使联盟的总效应为极大，即选取 x^i，使

$$v(M)-\max\sum_{i\in M}u_i(x^i), \tag{1.66}$$

任何实际的商品分配都必须考虑上述方式确定的联盟值 $v(M)$。

下面举一个国际贸易对策的例子来说明上述概念。假定有三个国家和四种商品：大米、小麦、钢材和石油。国家甲有两个单位的大米，但需要石油和小麦。国家乙有一个单位的小麦，但需要钢材和大米。国家丙有两个单位的钢材和三个单位的石油，但需要小麦和大米，同时也需要石油。这些国家拥有的商品可表示成

$$\begin{aligned} S^1&=(2, 0, 0, 0),\\ S^2&=(0, 1, 0, 0),\\ S^3&=(0, 0, 2, 3)。\end{aligned} \tag{1.67}$$

局中人的效用函数是

$$\begin{aligned} u_1(x)&=\min\{x_2, x_4\},\\ u_2(x)&=\min\{x_1, x_3\},\\ u_3(x)&=\min\{x_1, x_2, x_3\}。\end{aligned} \tag{1.68}$$

其中 $u_i(x)$ 给出了第 i 个国家所得的各类商品数。

对 $N=\{1, 2, 3\}$ 的不同子集 M,可计算联盟的值 $v(M)$。例如,如果由于某种政治原因,国家甲不能参加国际贸易,这对联盟 $\{2, 3\}$ 最有好处。导出的特征函数为

$$\begin{aligned} &v(\{1\})=v(\{2\})=v(\{3\})=0, \\ &v(\{1, 2\})=v(\{2, 3\})=0, \\ &v(\{1, 3\})=2,\ v(\{1, 2, 3\})=3。\end{aligned} \tag{1.69}$$

分配集为

$$V=\{(u_1, u_2, u_3): u_1+u_2+u_3=3,\ u_1, u_2, u_3 \geqslant 0\}, \tag{1.70}$$

其中心 C 为

$$C=\{(u_1, u_2, u_3) \in V,\ u_1+u_3 \geqslant 2\}。 \tag{1.71}$$

任何一种联盟都没有能力拒绝接受效用结果 $u=(u_1, u_2, u_3)$ 位于中心内的分配 x。

§1.6* 阿罗不可能性定理

1. 委员会选择和个体选择

在社会科学的领域内,阿罗(K. Arrow)发现了一种存在于理性选举过程中的悖论。个体的理性选择通过民主的方式转化成集体的理性选择实际上是无法进行的:不存在可靠的、可以建立理性的集体选择方法。尽管这一悖论是在考虑经济学和政治学中的选举制度时被发现的,但它对于某些人脑机理的理论也有应用。在应用中,人们可以将人类的大脑看成是由“神经选民”所组成的一个社会。

法国数学家兼社会学家孔多塞(de Condorcet)在18世纪后期就发现委员会选择在逻辑上似乎有矛盾。他举出了这样一个例子,为了确立国家的公民保健政策,由一个三人委员会来决策。共

有三种政策供选择:(1)只有国家健康服务机构;(2)只有私人医疗保险计划;(3)具有两种系统的混合体制。设委员会的三个人分别是甲、乙和丙。他们各自按照自己的偏爱倾向投票:甲最希望推行政策 1,然后是政策 2,最后是政策 3;乙最希望推行政策 2,然后是政策 3,最后是政策 1;丙的倾向依次是政策 3,然后是政策 1,最后是政策 2。投票结果为政策 1 与政策 2 的得票之比为二比一,政策 2 与政策 3 的得票之比为二比一,但是,政策 3 与政策 1 的得票之比也为二比一。当人们从个体选择过渡到某一委员会选择形式时,悖论出现了。这一理性选择的悖论表明了这样一个事实:A 优先于 B, B 优先于 C,并不意味着 A 优先于 C,这在逻辑上称为“不可传递性”。委员会选择虽然是由个体选择组成的,委员会选择与个体选择截然不同,个体的选择来自个人的倾向与偏爱,但委员会本身并没有倾向和偏爱。

2. 委员会决策的质心模型

设有一个由 n 个局中人组成的决策委员会,并有一个具有 m 个方案 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 的议题。再设每个局中人有一个倾向排序 R_i。符号 R_i 表示第 i 个局中人的“不次于”的倾向,$a_jR_ia_k$ 意味着第 i 个局中人选择 a_j 不次于 a_k。现在的问题在于是否存在一种方法使整个决策委员会对这些方案有一个选择好的排序 R。事实上,这样的排序总是存在的,例如局中人 1 是独裁者的话,则有 $R = R_1$。在整个委员会决策中,选择某个方案 a_1 作为最优选择,然后再选择一个次优方案,继续这样的步骤,我们就得到了所需要的 R,

$$a_1Ra_2Ra_3\cdots Ra_m。\tag{1.72}$$

为了要通过 $R_1, R_2, \cdots, R_n$ 计算出 R,我们必须要建立一个委员会决策模型。下面以最简单的质心模型为例,来说明什么是决策模型。如果有 n 种事物进行分配,那么一个分配方案可以用 $P = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 来表示,设委员会有 n 个局中人,他们对应

的理想分配方案 $P_i=(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{im})$，$i=1, 2, \cdots, n$。每个局中人的损失便是距离函数

$$d_i(P)=\Big[\sum_{j=1}^{m}(x_j-a_{ij})^2\Big]^{1/2}, \tag{1.73}$$

委员会损失函数

$$f(P)=\sum_{i=1}^{n}d_i^2(P), \tag{1.73}$$

损失函数表示以 P 为分配方案时，决策委员会总的不满意程度。(1.73)式对每个局中人都是等权的，所以在某种意义上讲它是公平的。容易发现

$$x_j=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij} \tag{1.74}$$

使得 $f(P)$取极小值。于是

$$\bar{P}=(x_1, \cdots, x_m)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_{i1}, \cdots, a_{im})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}P_i。 \tag{1.75}$$

注意到如果 $P_1, \cdots, P_n$ 满足预算限制 $a_{i1}+\cdots+a_{im}=b$ 的话，那么 $\bar{P}$ 也满足预算限制。$\bar{P}$ 称为集合$\{P_1, \cdots, P_n\}$的质心。

事实上，$\bar{P}$ 是各理想分配方案的平均值。在两个基本点局中人分配经费时有一种平均分配的趋势。当两个局中人在冲突中达成一种妥协时，就形成了一种“差额分配”。上述两种情形，都是两个理想方案的平均。将平均看作公平协定推广到多个局中人，即导致了质心模型。

3. 阿罗定理

如果我们已采用了某个委员会决策模型，并利用该模型计算出 R，余下的问题是这个 R 是“公平”的吗？阿罗不可能性定理对这个问题作出了明确的回答。设 $X=\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ 是方案集

合，而 $\mathscr{R}$ 是 X 上所有倾向关系的集合，令 $\mathscr{R}^n=\mathscr{R}\otimes\mathscr{R}\otimes\cdots\otimes\mathscr{R}$，在 $\mathscr{R}^n$ 上的函数

$$f:\mathscr{R}^n\to\mathscr{R}^n$$

称为一个阿罗社会福利函数，应满足下述三个原则。

1）帕累托(Pareto)原则　设 $f(R_1,\cdots,R_n)=R$，如果对于任意 $x,y\in X$，以及每个 i 有 xR_iy，则有 xRy。

这一原则说明，如果局中人都认为 x 不比 y 差，那么社会福利函数必须尊重这个一致的意见。

2）无关方案独立性原则　设 $f(R_1,\cdots,R_n)=R$，$f(R_1',\cdots,R_n')=R'$，S 是 X 的任一子集。若对所有 i，R_i 和 R_i' 在 S 上一致（$\forall x,y\in S$ 和 $\forall i$，$xR_iy\Leftrightarrow xR_i'y$），则 R 和 R' 在 S 上一致。

这一原则说明，在某些选项的子集中，选项的倾向顺序不会因为不在此子集中选项的倾向顺序的改变而改变。举例来说，委员会正在考虑 a, b, c 和 d 四个方案，并设每个局中人的方案排序是 R_i，并且这些排序所对应的社会福利函数给出 aRb。若现在某个局中人改变了想法，但对方案 a, b 的态度不变，那么该原则认为，即使在其他方案对的关系发生变化时，社会福利函数仍然给出 aRb。

3）无独裁原则　不存在这样的 i，使得对所有 $x,y\in S$，若 xR_iy，那么 xRy。

该原则指出，任何个体的选择都不能决定整个委员会的选择。这就防止了委员会选择是被内部的某个人强加于委员会的。

阿罗不可能性定理　若至少有两名局中人和三个方案，那么不存在阿罗社会福利函数，即任何委员会程序均会违反上述三个原则之一。

上述结果是阿罗在题为《社会福利概念中的一个困难》一文中发表的，他因而获得了1972年度的诺贝尔经济学奖。我们已经把这个结果称为阿罗不可能性定理，也有一些乐观人士称之为阿罗可能性定理。个体的选择通过民主的方式转化成委员会的选择过程由于阿罗定理的存在而无法进行：不存在可靠的、理性的委员会选择方法。

第 2 章　群论与对称性

群论是研究对称性不可缺少的重要数学工具。自然界有许多非常对称的事物，古人很早就注意到了雪花的特殊对称，古希腊人发现正多面体只可能有五种（正四面体、正六面体即立方体、正八面体、正十二面体和正二十面体）。法国数学家伽罗瓦（d'Evariste Galois，1811—1832）在 1930 年首次引入了群的概念，可以用数学的语言精确地描写对称。1880 年左右，挪威数学家李（S. Lie）把群的概念推广到连续的情况，建立了李群理论。从此，群论在物理学中有了广泛的应用，从固体物理到原子核物理，从凝聚态物理到高能物理，无不和群论有着密切的关系。群论使我们在更深的层次上认识了物理世界。

一种几何对称性可以理解为一种运动，通过这种运动保持图案或物体的形状不变。例如，球绕其中心的任意旋转保持不变，六棱柱绕中心轴旋转 60°后并不改变原状。各种物理理论也有类似的对称性，但是经过变换保持不变的并不是图案或者物体，而是该理论本身的数学形式。例如，质子和中子的强相互作用有相同的数学形式，即它们有同位旋对称性。在过去的一个世纪中，科学家们公认，对称性在我们对自然界的认识中起着极为重要的作用。

§2.1　群论的基本概念

1. 群的定义

定义　一个集合 G，被赋予一种操作或运算，称之为群的乘法，如果它满足下列四个条件，则 G 被称为**群**（group）：

(1) 封闭性：对任意的 $g_i,\ g_j \in G$，有 $g_i g_j = g_k \in G$；

(2) 结合律：对任意的 g_i，g_j，$g_k \in G$，有 $(g_i g_j)g_k = g_i(g_j g_k)$；

(3) G 中包含单位元 $e \in G$，使得对任意 $g \in G$，有 $ge = eg = g$；

(4) 对任意 $g \in G$，存在逆元 $g^{-1} \in G$，使 $gg^{-1} = g^{-1}g = e$。

这四个条件称为群的公理。

例 1 实数集合 $\mathbf{R}$ 在通常的加法下构成群。其单位元为 0，$a \in \mathbf{R}$ 的逆元为 $(-a)$。

例 2 除去 0 的实数集合 $\mathbf{R}/\{0\}$ 在通常的乘法下构成群。其单位元为 1，$a \in \mathbf{R}$ 的逆元为 a^{-1}。如集合 $\{1, -1\}$ 在普通的乘法下构成群。

例 3 所有行列式不为零的 $n \times n$ 矩阵集合在矩阵乘法下构成群。其单位元为 $n \times n$ 的单位矩阵，逆元即为相应的逆矩阵。

这个群通常被称为一般线性群 $GL(n, R)$ 或 $GL(n, C)$。注意这里“行列式不为零”的条件是必须的，因为行列式为零的矩阵是没有逆矩阵的。

群的乘法一般是不可交换的，$g_i g_j \neq g_j g_i$，如果对 G 中任意两个元素 g_i，$g_j \in G$，有 $g_i g_j = g_j g_i$，则称群 G 为阿贝尔(Abel)群，否则称之为非阿贝尔群。前面例 1 和例 2 都是阿贝尔群，而例 3 一般是非阿贝尔群。

群 G 所包含的群元数目 n 称为群 G 的阶(order)。如果 n 有限，则 G 为**有限群**，否则称为**无限群**。对于有限群，任意两个元素的乘积可以用一张表——**乘法表**(multiplication table)来表示。一个群的结构由它的乘法表完全确定。

下面考虑 3 阶群 $G_3 = \{e, a, b\}$ 的结构。显然，$ab \neq a$，$ab \neq b$（否则将有 $a = e$ 或 $b = e$）。只能有 $ab = e$，由此可得 $a^{-1} = b$，$b^{-1} = a$。同理，$a^2 \neq a$（否则将有 $a = e$），$a^2 \neq e$（否则将有 $a^{-1} = a = b$），因此只能 $a^2 = b$，而 $b^2 = bb = a^2 b = ae = a$。因此，$G_3$ 群可以写成

$$G_3 = \{a, b = a^2, e = a^3\}。\tag{2.1}$$

即 G_3 群是由一个元素 a 生成的，这样的群称为循环群。循环群一定是阿贝尔群。n 阶循环群可以写成

$$G_n = \{a, a^2, \cdots, a^n = e\}。\tag{2.2}$$

类似地我们可以讨论 4 阶群和 6 阶群的结构。2 阶和 3 阶群只有一种循环群结构，而 4 阶群有两种结构，并且都是阿贝尔群。6 阶群也有两种结构。高阶群会有更多的不同结构。对高阶群结构的讨论比较复杂，可参见有关专著，这儿不再赘述。

G_1	e
e	e

G_2	e	a
e	e	a
a	a	e

G_3	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

G_4^1	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

G_4^2	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

例 4　考虑一等边三角形，有如下一些操作保持其不变：

c_3^1：绕通过中心并垂直于三角形所在平面的轴旋转 $2\pi/3$，

c_3^2：绕通过中心并垂直于三角形所在平面的轴旋转 $4\pi/3$，

I：恒等变换，即不旋转或旋转 2π，

c_{2x}：绕连接第一个顶点和对边中心的轴旋转 π，

c_{2y}：绕连接第二个顶点和对边中心的轴旋转 π，

c_{2z}：绕连接第三个顶点和对边中心的轴旋转 π。

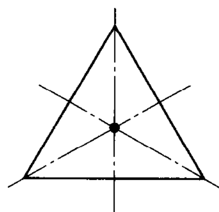


图　2.1

操作的全体构成群。通常把这个群记为 C_{3v}，它是 32 个晶体点群之一。容易作出 C_{3v} 的乘法表。

C_{3v}	I	c_3^1	c_3^2	c_{2x}	c_{2y}	c_{2z}
I	I	c_3^1	c_3^2	c_{2x}	c_{2y}	c_{2z}
c_3^1	c_3^1	c_3^2	I	c_{2z}	c_{2x}	c_{2y}
c_3^2	c_3^2	I	c_3^1	c_{2y}	c_{2z}	c_{2x}
c_{2x}	c_{2x}	c_{2y}	c_{2z}	I	c_3^1	c_3^2
c_{2y}	c_{2y}	c_{2z}	c_{2x}	c_3^2	I	c_3^1
c_{2z}	c_{2z}	c_{2x}	c_{2y}	c_3^1	c_3^2	I

从乘法表可以看到，C_{3v} 群是一个非阿贝尔群，

$$c_3^1 c_{2x} = c_{2z} \neq c_{2x} c_3^1 = c_{2y}。 \tag{2.3}$$

从乘法表还可以看出，表中的每一行、每一列都是群元的不同排列。也就是说，用某个群元去乘整个群，只是将群元重新排列。可以证明如下的一般定理。

重排定理 设 $g \in G$ 是群 G 的任一元素，则有 $gG = G$ 或 $Gg = G$。这个定理表示，当用任意一个群元去乘群 G 时，只是将群元改变了一个次序，群 G 本身并没有任何改变。

定义 群 G 的一个子集 H，如果在和 G 同样的乘法规则下也构成群，则称 H 为 G 的一个**子群**(subgroup)。

显然，只含单位元的 1 阶群和群 G 本身一定是群 G 的子群，称为**平凡子群**。除此之外的子群称为**真子群**(proper subgroup)。群 G_4^2 有 3 个 2 阶子群 $\{e, a\}$，$\{e, b\}$，$\{e, c\}$。C_{3v} 群有 3 个 2 阶子群 $\{I, c_{2x}\}$，$\{I, c_{2y}\}$，$\{I, c_{2z}\}$，1 个 3 阶子群 $\{I, c_3^1, c_3^2\}$。

2. 共轭类、陪集

设有两个群元 g_i，$g_j \in G$，如果 G 中存在元素 $g \in G$，使 $g g_i g^{-1} = g_j$，则称 g_i 和 g_j **共轭**(conjugation)。共轭是一种关系，

记为～。共轭有如下性质：

(1) 对称律：若 $g_i \sim g_j$，则 $g_j \sim g_i$；

(2) 反身律：$g_i \sim g_i$；

(3) 传递律：若 $g_i \sim g_j$，$g_j \sim g_k$，则 $g_i \sim g_k$。

因此共扼关系是一种等价关系，可以把群 G 的元素按共轭关系进行分类，称为**共轭类**(conjugacy class)，属于同一个共轭类的元素彼此都共轭。因为 $GeG^{-1} = e$，所以单位元只与自身共轭，自成一类。如果群 G 是阿贝尔群，则由

$$gg_ig^{-1} = g_igg^{-1} = g_i \tag{2.4}$$

可知，阿贝尔群的每个元素都自成一类，而每个类只含一个元素。可以证明，群 G 的每个元素都属于某个类，也只属于一个类。这样，群 G 可以按类分解：

$$G = [e] \oplus [g_2] \oplus \cdots \oplus [g_l], \tag{2.5}$$

其中 e，g_2，…，g_l 是相应共轭类的代表元。设 $H \subset G$ 是群 G 的一个子群，取 G 的一个固定元素 $a \in G$ $(a \notin H)$，作集合

$$aH = \{ah \mid h \in H\}, \tag{2.6}$$

称集合 aH 是关于子群 H 的一个**左陪集**(left coset)。同理可作右陪集

$$Ha = \{ha \mid h \in H\}。 \tag{2.7}$$

一般情况下左右陪集是不等的，$aH \neq Ha$。容易证明，陪集有如下性质：

(1) 每个陪集中的元素个数和子群 H 的元素个数相等。

(2) 如果 $b \in aH$，则有 $aH = bH$。因此，陪集的代表元可以任意选取。

(3) 任意两个左陪集 aH，bH，或相等或没有共同元素。

利用子群 H 的陪集的性质，我们可以把群 G 按陪集分解：

$$G = H \oplus a_2H \oplus \cdots \oplus a_lH, \tag{2.8}$$

其中 $e = a_1, a_2, \cdots, a_l$ 是陪集的代表元。群 G 中关于子群 H 的陪集个数称为 H 在 G 中的**指数**(index)。如果群 G 的阶数为 n，子群 H 的阶数为 s，则 n/s 是一个整数。这个结论称为拉格朗日(Lagrange)定理。对于 6 阶群，不考虑平凡子群，则它只能有 2 阶和 3 阶子群。

如果 H 是群 G 的一个子群，则可以证明，对 $g \in G$，

$$gHg^{-1} = \{ghg^{-1} \mid \forall h \in H\} \tag{2.9}$$

也是 G 的一个子群。子群 H 和 gHg^{-1} 称为是互相共轭子群。共轭子群具有相同的阶数。可以证明，共轭子群或者完全相同，或者只有单位元是共同元素。

例 5 对群 C_{3v}，共有 3 类，

$$[I] = I,\ [c_{2x}] = \{c_{2x},\ c_{2y},\ c_{2z}\},\ [c_3^1] = \{c_3^1,\ c_3^2\}, \tag{2.10}$$

因此可以将 C_{3v} 按类分解为：

$$C_{3v} = [I] \oplus [c_{2x}] \oplus [c_3^1]。 \tag{2.11}$$

例 6 数 1, 2, 3 的所有置换构成群，称为置换群，记为 S_3。这些置换可以写成

$$\begin{aligned} &e = \begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix},\ a = \begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix}, \\ &d = \begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix},\ f = \begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.12}$$

乘法定义为

$$\begin{aligned} ab &= \begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix}\begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}312\\123\end{pmatrix}\begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix} = e, \\ cd &= \begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix}\begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}321\\231\end{pmatrix}\begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix} = a, \end{aligned} \tag{2.13}$$

等等。S_3 群共有 3 类，$[e]$，$[a] = \{a, b\}$，$[c] = \{c, d, f\}$。

n 个数的所有置换也构成群，记为 S_n，这是 $n!$ 阶的群。

3. 不变子群

定义 设 H 是群 G 的一个子群，如果对任意的 $g \in G$，有

$$H = gHg^{-1}, \tag{2.14}$$

即 H 的左右陪集相等，$Hg = gH$，则称 H 为 G 的**不变子群**(invariant subgroup)或正规子群。

注意，$Hg = gH$ 并不意味着 g 和 H 中的元素对易，只是表示 $gh_i = h_j g$，h_i，$h_j \in H$。如果 H 是群 G 的不变子群，则我们将 G 分解为

$$G = H \oplus a_2 H \oplus \cdots \oplus a_l H。 \tag{2.15}$$

定义集合

$$G/H = \{H, a_2 H, \cdots, a_l H\}, \tag{2.16}$$

称为商集合。如果按下述方式定义乘法，

$$(a_i H)(a_j H) = (a_i a_j)H, \tag{2.17}$$

则商集合 G/H 构成一个 $l(= n/s)$ 阶的群，称为**商群**。可以证明，上述乘法满足群的4个公理，且与代表元素的选取无关。

例7 考虑群 C_{3v}，取子群 $H = \{I, c_3^1, c_3^2\}$，易证

$$c_3^1 H = Hc_3^1 = H,\ c_3^2 H = Hc_3^2 = H,\ IH = HI = H,$$

$$c_{2x}H = Hc_{2x} = c_{2y}H = Hc_{2y} = c_{2z}H = Hc_{2z} = \{c_{2x}, c_{2y}, c_{2z}\}。$$

H 是不变子群，因此按陪集分解为

$$C_{3v} = H \oplus c_{2x}H。 \tag{2.18}$$

集合 $C_{3v}/H = \{H, c_{2x}H\}$ 构成一个2阶群。

如果取子群 $H = \{I, c_{2x}\}$（可证这个子群不是不变子群），则有陪集分解

$$C_{3v} = H \oplus c_{2y}H \oplus c_{2z}H。 \tag{2.19}$$

4. 同态与同构

定义 设 G 和 G' 是两个群，如果存在映射 $f: G \to G'$，$a \to f(a)(a)$，满足

$$f(ab) = f(a)f(b),\ \forall a, b \in G,\ f(a),\ f(b) \in G', \tag{2.20}$$

则称 f 是 $G \to G'$ 的一个**同态**(homomorphism)，记为 $G \sim G'$。

最简单的，我们可以把群 G 的所有元素都映射为单位元，

$$f(g) \to e,\ \forall g \in G。 \tag{2.21}$$

即任何群都可以同态于1阶群。

定义 如果映射 $f: G \to G'$ 是同态映射，且是1-1到上的映射，则称 f 是 $G \to G'$ 的同构映射，简称 G 与 G' 同构，记为 $G \approx G'$。两个同构的群具有完全相同的乘法表，因而在代数上是完全一致的。

例8 考虑群 C_{3v} 和群 $G = \{1, -1\}$ 的一个同态：

$$\{I,\ c_3^1,\ c_3^2\} \to 1,\ \{c_{2x},\ c_{2y},\ c_{2z}\} \to -1, \tag{2.22}$$

因此，$C_{3v} \sim \{1, -1\}$。

例9 考虑 2×2 的6阶矩阵群 G，

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix},$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix},\ M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2.23}$$

$$M_5 = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix},\ M_6 = \begin{bmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}。$$

可以建立 C_{3v} 与 G 之间的一个同构映射 $f: C_{3v} \to G$，只要令

$$f(I) = M_1,\ f(c_3^1) = M_2,\ f(c_3^2) = M_3,\ f(c_{2x}) = M_4,$$
$$f(c_{2y}) = M_5,\ f(c_{2z}) = M_6。 \tag{2.24}$$

可以证明 C_{3v}群和置换群 S_3 也是同构的。

5. 群的直积

从两个较小的群 G_1 和 G_2 出发,可以构造一个较大的群——直积群:

$$G = G_1 \times G_2 = \{(g_1, g_2) \mid g_1 \in G_1, g_2 \in G_2\}。 \tag{2.25}$$

乘法定义为

$$gg' = (g_1, g_2)(g_1', g_2') = (g_1 g_1', g_2 g_2') \in G。 \tag{2.26}$$

如此定义的乘法满足群的公理,因此 $G = G_1 \times G_2$ 构成群,称群 G 是G_1 和 G_2 的直积群。显然,群 G 的阶数 n 是G_1 和 G_2 的阶数之积,$n = n_1 n_2$。直积的定义可以推广到多个群:

$$G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_l。 \tag{2.27}$$

容易证明,直积群 $G = G_1 \times G_2$ 具有子群 $\{e_1\} \times G_2$ 和 $G_1 \times \{e_2\}$。

§2.2 群的表示

1. 表示的定义

定义 如果存在群 G 到一个线性矢量空间 V 上的算子群 $\hat{\Gamma}(G)$ 的一个同态,则称$\hat{\Gamma}(G)$构成群 G 的一个表示(representation)。即

$$g \in G \to \hat{\Gamma}(g), \tag{2.28}$$

其中$\hat{\Gamma}(g)$是作用在矢量空间 V 上的线性算子,满足

$$\hat{\Gamma}(g_1)\,\hat{\Gamma}(g_2) = \hat{\Gamma}(g_1 g_2)。 \tag{2.29}$$

矢量空间 V 的维数称为表示的维数。如果这个同态也是同构(即

$\hat{\Gamma}$是 1-1 到上的映射)，则称该表示是忠实表示。

如果在 V 上选择一组基$\{\hat{e}_1, \cdots, \hat{e}_d\}$，则$\hat{\Gamma}(g)$可以用 $d\times d$ 的矩阵来表示：

$$\hat{e}_i' = \hat{\Gamma}(g_i)\,\hat{e}_i = \sum_j \hat{e}_j D_{ji}(g_i) = \hat{e}_j D_{ji}(g_i),\ \forall g_i \in G, \tag{2.30}$$

其中 $D(g_i)$是 $d\times d$ 的矩阵。容易证明

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}(g_1)\,\hat{\Gamma}(g_2)\,\hat{e}_i &= \hat{\Gamma}(g_1)\,\hat{e}_j D_{ji}(g_2) = \hat{e}_k D_{kj}(g_1) D_{ji}(g_2)\\ &= \hat{e}_k[D(g_1)D(g_2)]_{ki} = \hat{\Gamma}(g_1 g_2)\,\hat{e}_i\\ &= \hat{e}_k D_{ki}(g_1 g_2),\end{aligned} \tag{2.31}$$

即

$$D(g_1)D(g_2) = D(g_1 g_2), \tag{2.32}$$

其中用到了矩阵的乘法。另外还应该有

$$D(g^{-1}) = D(g)^{-1},\ D(e) = I。 \tag{2.33}$$

因此，矩阵群 $\{D(g)\mid \forall g\in G\}$ 构成了群 G 的一个矩阵表示。矩阵的维数就称为表示的维数。我们通常说的表示一般都是指矩阵表示。如果表示矩阵是幺正的，即

$$D^{+}(g) = D^{-1}(g), \tag{2.34}$$

则称其为幺正表示(unitary representation)。任何表示都有等价的幺正表示。

例 10　$\Gamma(g) = 1,\ \forall g\in G$，即将所有的群元映射为 1，这显然满足同态关系：

$$\Gamma(g_1)\Gamma(g_2) = 1\cdot 1 = 1 = \Gamma(g_1 g_2)。 \tag{2.35}$$

因此，$g\in G\rightarrow 1$ 是群 G 的一个一维表示，称为平凡表示或**恒等表示**，用 $\Gamma^{(1)}$ 表示。任何有限群都有一个一维恒等表示。

例 8 给出了群 C_{3v}的另一个一维表示：

$$\{I,\ c_3^1,\ c_3^2\} \to 1,\ \{c_{2x},\ c_{2y},\ c_{2z}\} \to -1。\tag{2.36}$$

例9给出了群 C_{3v} 的二维表示：

$$I \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ c_3^1 \to \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix},$$

$$c_3^2 \to \begin{bmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix},\ c_{2x} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\tag{2.37}$$

$$c_{2y} \to \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix},\ c_{2z} \to \begin{bmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}。$$

因为这是一个同构映射，所以这是一个忠实表示。从这些例子可以看出，一个群 G 可以有许多维数相同或者维数不同的表示。

定义 设 $\{D(g) \mid \forall g \in G\}$ 是群 G 的一个 n 维表示，现在任取一个非奇异的 n 维矩阵 S，作集合

$$\{SD(g)S^{-1} \mid \forall g \in G\} = SD(G)S^{-1},\tag{2.38}$$

因为 $D(G)$ 是 G 的一个同态，易证 $SD(G)S^{-1}$ 也是 G 的一个同态：

$$\begin{aligned} SD(g_1g_2)S^{-1} &= SD(g_1)D(g_2)S^{-1} \\ &= SD(g_1)S \cdot S^{-1}D(g_2)S^{-1}。\end{aligned}\tag{2.39}$$

因此，$SD(G)S^{-1}$ 也是群 G 的一个表示。我们称其为 $D(G)$ 的等价表示(equivalent representation)。选取不同的非奇异矩阵 S，我们可以得到许多等价表示。可以证明，表示矩阵的相似变换，相当于对表示的基作线性变换，也就是说，相当于选取不同的坐标系。因此对于物理问题，等价表示所代表的物理是相同的。等价表示在本质上是同一个表示，我们只需要研究彼此不等价的那些表示。

定义 如果一个表示 $\{D(g) \mid \forall g \in G\}$ 经过相似变换后可以化成方块对角形式

$$D(g) = \begin{bmatrix} D_1(g) & 0 \\ 0 & D_2(g) \end{bmatrix},\ \forall g \in G,\tag{2.40}$$

则称这个表示是可约表示,如果不能通过相似变换把所有表示矩阵同时化成方块对角形式,则称这个表示是**不可约表示**(irreducible representation)。我们感兴趣的是不可约表示。将可约表示化成方块对角形式的过程称为**约化**。

定义 设 $\{D(g) \mid \forall g \in G\}$ 是群 G 的 d 维表示,则

$$\chi(g) = \mathrm{tr}[D(g)] = \sum_{i=1}^{d} D_{ii}(g) \tag{2.41}$$

称为群元 g 在该表示中的特征标(character)。因为对任何表示,单位元都对应单位矩阵,$D(e) = I$,所以,$\chi(e) = d$。即单位元的特征标就是表示的维数。由

$$\mathrm{tr}(ABA^{-1}) = \mathrm{tr}(BA^{-1}A) = \mathrm{tr}(B) \tag{2.42}$$

可知,等价表示的特征标相同。

$$\begin{aligned} \chi'(g) &= \mathrm{tr}[D'(g)] = \mathrm{tr}[SD(g)S^{-1}] \\ &= \mathrm{tr}[D(g)] = \sum_{i=1}^{d} D_{ii}(g) = \chi(g)。 \end{aligned} \tag{2.43}$$

对于群 G 的一个给定表示,同一个类的元素具有相同的特征标。由类的定义,$g' = hgh^{-1}$, h, $g \in G$,可得

$$\begin{aligned} D(g') &= D(hgh^{-1}) = D(h)D(g)D(h^{-1}) \\ &= D(h)D(g)D^{-1}(h), \end{aligned} \tag{2.44}$$

因此有

$$\begin{aligned} \chi(g') &= \mathrm{tr}[D(g')] = \mathrm{tr}[D(h)D(g)D^{-1}(h)] \\ &= \mathrm{tr}[D(g)] = \chi(g)。 \end{aligned} \tag{2.45}$$

2. 一些基本定理

定理 1(舒尔(Schur)引理) 与某一不可约表示的所有矩阵对易的矩阵 M 一定是一个单位矩阵与常数的乘积,即当

$$MD(g) = D(g)M, \ \forall g \in G, \tag{2.46}$$

则有

$$M = \lambda I 。 \tag{2.47}$$

证 不失一般性，可以假定 $D(G)$ 是幺正表示，否则总可以通过相似变换将其幺正化。对方程(2.46) 取厄米共轭，有

$$M^+D^+(g) = D^+(g)M^+ \rightarrow M^+D^{-1}(g) = D^{-1}(g)M^+$$
$$\rightarrow M^+D(g^{-1}) = D(g^{-1})M^+ 。 \tag{2.48}$$

因为群元要取遍整个群 G，所以上式也就是

$$M^+D(g) = D(g)M^+, \ \forall g \in G。 \tag{2.49}$$

所以，如果 M 与所有表示矩阵对易，则 M^+ 也和所有表示矩阵对易。这意味着 $M+M^+$ 也和所有表示矩阵对易。因此不失一般性，可以假定 M 是厄米矩阵。根据厄米矩阵的性质，可以通过幺正变换将其对角化：

$$M' = UMU^{-1} = (\lambda_i\delta_{ij})。 \tag{2.50}$$

可以假定其中相同的 λ_i 都已经排列在一起(否则总可以通过相似变换做到这一点)。记 $D'(g) = UD(g)U^{-1}$，则方程(2.46) 变为

$$M'D'(g) = D'(g)M', \ \forall g \in G, \tag{2.51}$$

上式是矩阵等式，取(ij)矩阵元，得

$$M'_{ik}D'_{kj}(g) = D'_{ik}(g)M'_{kj} \rightarrow \lambda_i D'_{ij}(g) = D'_{ij}(g)\lambda_j$$
$$\rightarrow D'_{ij}(g)(\lambda_i - \lambda_j) = 0, \tag{2.52}$$

若 $\lambda_i \neq \lambda_j$，则有 $D'_{ij}(g) = 0$。如果对 $i = 1, 2, \cdots, p$ 时有 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p$，其余 $\lambda_i \neq \lambda_j$，则

$$D'_{ij}(g) = 0, \ i = 1, 2, \cdots, p; \ j = p+1, p+2, \cdots, n \tag{2.53}$$

及

$$D'_{ij}(g)=0,\ i=p+1,\ p+2,\ \cdots,\ n;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ p。\tag{2.54}$$

这意味着 $D'(g)$ 实际上是方块对角化的：

$$D'(g)=\begin{pmatrix} p\times p & 0 \\ 0 & (n-p)\times(n-p) \end{pmatrix},\tag{2.55}$$

因此 $D'(g)$ 是可约表示。与题设矛盾。$D(g)$ 与 $D'(g)$ 是等价表示，若 $D(g)$ 是不可约表示，则 $D'(g)$ 也是不可约表示。只能有

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n,\tag{2.56}$$

即

$$M=\lambda I。\tag{2.57}$$

反之，如果 $D(g)$ 是可约表示，则一定能找到一个非常数矩阵 $M\neq\lambda I$ 与所有表示矩阵对易。

作为舒尔引理的推广，我们有如下定理：

定理 2 设 $\{D^{(1)}(g)\}$ 和 $\{D^{(2)}(g)\}$ 是群 G 的两个不可约表示，维数分别是 d_1 和 d_2，若存在一个 $d_2\times d_1$ 的矩阵 M，使

$$MD^{(1)}(g)=D^{(2)}(g)M,\ \forall g\in G,\tag{2.58}$$

则当 $d_1\neq d_2$ 时，M 为零矩阵；当 $d_1=d_2$ 时，M 或为零矩阵，或有 $\det M\neq 0$，这时 $\{D^{(1)}(g)\}$ 和 $\{D^{(2)}(g)\}$ 是等价表示。

证 不失一般性，可以假定 $\{D^{(1)}(g)\}$ 和 $\{D^{(2)}(g)\}$ 是幺正表示，其次假定 $d_1\leqslant d_2$，方程(2.58)两边取厄米共轭，注意到表示的幺正性，有

$$\begin{aligned}&D^{(1)+}(g)M^{+}=M^{+}D^{(2)+}(g)\\ \to\ &D^{(1)}(g^{-1})M^{+}=M^{+}D^{(2)}(g^{-1})\\ \to\ &D^{(1)}(g)M^{+}=M^{+}D^{(2)}(g),\end{aligned}\tag{2.59}$$

左乘 M：

$$MD^{(1)}(g)M^{+}=MM^{+}D^{(2)}(g), \tag{2.60}$$

方程(2.58)右乘 M^{-}：

$$MD^{(1)}(g)M^{+}=D^{(2)}(g)MM^{+}, \tag{2.61}$$

比较两式，得

$$D^{(2)}(g)MM^{+}=MM^{+}D^{(2)}(g)。 \tag{2.62}$$

因为$\{D^{(2)}(g)\}$是不可约表示，由舒尔引理，$MM^{+}=\lambda I$，如果 $d_1=d_2$，此时 M 为 $d_1\times d_1$ 的方阵，若 $\lambda=0$，则由 $MM^{+}=0$ 得：

$$(MM^{+})_{ii}=0\rightarrow\sum_{k}M_{ki}M_{ik}^{+}=\sum_{k}|M_{ki}|^{2}=0$$

$$\rightarrow M_{ki}=0\rightarrow M=0。 \tag{2.63}$$

因此 M 是零矩阵。若 $\lambda\neq 0$，则

$$\det(\lambda I)=\det(MM^{+})=|\det M|^{2}=\lambda^{d_1}\neq 0。 \tag{2.64}$$

因此

$$D^{(2)}(g)=MD^{(1)}(g)M^{-1}, \tag{2.65}$$

二者等价。当 $d_1<d_2$，这时 M 不是方阵，但可以添加一些零元素使其成为方阵 N

$$N=\begin{pmatrix} m_{11}\cdots m_{1d_1} & 0\cdots 0\\ \cdots\cdots\quad\cdots & 0\cdots 0\\ m_{d_2 1}\cdots m_{d_2 d_1} & 0\cdots 0\end{pmatrix}。 \tag{2.66}$$

显然

$$MM^{+}=NN^{+}, \tag{2.67}$$

因为 $\det N=0$，所以有

$$\det(NN^{+})=|\det N|^{2}=\det(MM^{+})=\lambda^{d_2}=0$$

$$\rightarrow \lambda = 0 \rightarrow M = 0。\tag{2.68}$$

定理 3(广义正交定理) 设$\{D^{(p)}(g)\}$和$\{D^{(q)}(g)\}$是群 G 的两个不等价的不可约幺正表示,则有如下正交关系成立:

$$\sum_{g\in G} D^{(p)^*}(g)_{\mu\nu} D^{(q)}(g)_{\mu'\nu'} = \frac{n}{d_p}\delta_{pq}\delta_{\mu\mu'}\delta_{\nu\nu'}, \tag{2.69}$$

其中 n 为群 G 的阶数,d_p 为表示$\{D^{(p)}(g)\}$的维数。

证 作一矩阵

$$M = \sum_{g\in G} D^{(q)}(g) S D^{(p)}(g^{-1}), \tag{2.70}$$

其中 S 为 $d_q \times d_p$ 的任意矩阵。由群的性质可得

$$\begin{aligned}
D^{(q)}(g)M &= D^{(q)}(g)\sum_{g'\in G} D^{(q)}(g') S D^{(p)}(g'^{-1}) \\
&= \sum_{g'\in G} D^{(q)}(g) D^{(q)}(g') S D^{(p)}(g'\ ^{1}) \\
&= \sum_{g'\in G} D^{(q)}(gg') S D^{(p)}((gg')^{-1}) D^{(p)}(g) \\
&= M D^{(p)}(g),
\end{aligned} \tag{2.71}$$

因为当 $p \neq q$ 时$\{D^{(p)}(g)\}$和$\{D^{(q)}(g)\}$是两个不等价的不可约幺正表示,由前面的定理 2,M 一定是零矩阵,$M = 0$,因为 S 是任意的,可以取 $S_{\nu\nu'} = 1$,其余矩阵元都为零。则

$$\begin{aligned}
M_{\mu\mu'} = 0 &= \sum_{g\in G} D^{(q)}(g)_{\mu\alpha} S_{\alpha\beta} D^{(p)}(g^{-1})_{\beta\mu'} \\
&= \sum_{g\in G} D^{(q)}(g)_{\mu\nu} D^{(p)}(g^{-1})_{\nu'\mu'} \\
&= \sum_{g\in G} D^{(p)^*}(g)_{\mu'\nu'} D^{(q)}(g)_{\mu\nu} = 0,
\end{aligned} \tag{2.72}$$

当 $p = q$ 时,两个不可约表示实际上是同一个表示,因此有 $M=$

λI。即

$$\begin{aligned} M_{\mu\mu'} &= \sum_{g\in G} D^{(q)}(g)_{\mu\alpha} S_{\alpha\beta} D^{(p)}(g^{-1})_{\beta\mu'} \\ &= \sum_{g\in G} D^{(q)}(g)_{\mu\nu} D^{(p)}(g^{-1})_{\nu'\mu'} \\ &= \sum_{g\in G} D^{(p)*}(g)_{\mu'\nu'} D^{(q)}(g)_{\mu\nu} \\ &= \lambda\delta_{\mu\mu'}, \end{aligned} \tag{2.73}$$

这里 S 的取法同上，取 $\mu=\mu'$ 并对其求和，得

$$\begin{aligned} &\sum_{g\in G}\sum_{\mu} D^{(p)*}(g)_{\mu\nu'} D^{(p)}(g)_{\mu\nu} = \lambda\sum_{\mu}\delta_{\mu\mu} = \lambda d_p \\ &= \sum_{g\in G}\sum_{\mu} D^{(p)+}(g)_{\nu'\mu} D^{(p)}(g)_{\mu\nu} \\ &= \sum_{g\in G}\sum_{\mu} D^{(p)}(g^{-1})_{\nu'\mu} D^{(p)}(g)_{\mu\nu} = \sum_{g\in G} D^{(p)}(e)_{\nu'\nu} \\ &= \sum_{g\in G}\delta_{\nu'\nu} = n\delta_{\nu'\nu} \rightarrow \lambda = \frac{n}{d_p}\delta_{\nu'\nu}。 \end{aligned} \tag{2.74}$$

代入方程(2.73)，有

$$\sum_{g\in G} D^{(p)*}(g)_{\mu\nu} D^{(q)}(g)_{\mu'\nu'} = \frac{n}{d_p}\delta_{pq}\delta_{\mu\mu'}\delta_{\nu\nu'}。 \tag{2.75}$$

这个等式类似于矢量的正交关系。如果令

$$r_i^{(p,\mu,\nu)} = \sqrt{\frac{d_p}{n}} D^{(p)}(g_i)_{\mu\nu}, \tag{2.76}$$

则上式可以写成

$$\boldsymbol{r}^{(p,\mu,\nu)*}\cdot\boldsymbol{r}^{(q,\mu',\nu')} = \delta_{pq}\delta_{\mu\mu'}\delta_{\nu\nu'}。 \tag{2.77}$$

我们知道，n 维空间里，线性独立的互相正交的矢量最多不超过 n 个。取不同的 $p,\ \mu,\ \nu$ 值，一共有 $d_1^2+d_2^2+\cdots+d_r^2$ 个表示，也就是说，n 阶群的不可约表示的维数平方和不会超过 n。实际上

有如下定理：

定理 4 有限群 G 的所有不等价不可约表示的维数平方和等于群 G 的阶数 n，即

$$d_1^2+d_2^2+\cdots+d_r^2=n。\tag{2.78}$$

前面的例子中，群 C_{3v} 有两个一维表示，一个二维表示，其平方和为

$$d_1^2+d_2^2+d_3^2=1^2+1^2+2^2=6,\tag{2.79}$$

因此，C_{3v} 只有这三个表示。对于群 G_4^2，我们有表示

$$\begin{aligned}&\{e,\ a,\ b,\ c\}\rightarrow\{1,\ 1,\ 1,\ 1\},\\&\{e,\ a,\ b,\ c\}\rightarrow\{1,\ 1,\ -1,\ -1\},\\&\{e,\ a,\ b,\ c\}\rightarrow\{1,\ -1,\ 1,\ -1\},\\&\{e,\ a,\ b,\ c\}\rightarrow\{1,\ -1,\ -1,\ 1\},\end{aligned}\tag{2.80}$$

我们有

$$d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2=1^2+1^2+1^2+1^2=4。\tag{2.81}$$

在广义正交定理中令 $\mu=\nu,\ \mu'=\nu'$，并对其求和：

$$\begin{aligned}&\sum_{g\in G}\sum_{\mu\mu'}D^{(p)^*}(g)_{\mu\mu}D^{(q)}(g)_{\mu'\mu'}=\frac{n}{d_p}\delta_{pq}\sum_{\mu\mu'}\delta_{\mu\mu'}\delta_{\mu\mu'}\\&=\frac{n}{d_p}\delta_{pq}\sum_{\mu}\delta_{\mu\mu}=n\delta_{pq}=\sum_{g\in G}\chi^{(p)^*}(g)\chi^{(q)}(g)\\&\rightarrow\frac{1}{n}\sum_{g\in G}\chi^{(p)^*}(g)\chi^{(q)}(g)=\delta_{pq}\\&\rightarrow\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l}\sum_{i=1}k_i\chi^{(p)^*}([g_i])\chi^{(q)}([g_i])=\delta_{pq}。\end{aligned}\tag{2.82}$$

这是特征标的正交关系。由于同类的元素具有相同的特征标，上式已经改为按类求和。类似地引入

$$r_i^{(p)} = \sqrt{\frac{k_i}{n}}\chi^{(p)}([g_i])。 \tag{2.83}$$

这是 l 维的矢量。上式可以写成

$$\boldsymbol{r}^{(p)*} \cdot \boldsymbol{r}^{(q)} = \delta_{pq}。 \tag{2.84}$$

这样的矢量共有 r 个，因此有限群 G 的所有不等价不可约表示的数目不大于群 G 的共轭类的数目。实际上有如下定理：

定理 5 有限群 G 的所有不等价不可约表示的数目等于群 G 的共轭类的数目。

由此可以唯一确定不可约表示的数目和维数。如点群 D_4，是八阶群，有五个共轭类，所以，

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 = 8 \tag{2.85}$$

的解是

$$1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 = 8, \tag{2.86}$$

即四个一维表示，一个二维表示。对于阿贝尔群，由于每个群元自成一类，共轭类的数目等于群的阶数，所以共有 n 个不可约表示，每个表示都是一维的。

如果一个可约表示 $D(G)$ 可以按不可约表示分解为

$$D(g) = \sum_r a_r D^{(r)}(g), \tag{2.87}$$

取迹，得

$$\chi(g) = \sum_r a_r \chi^{(r)}(g)。 \tag{2.88}$$

利用特征标的正交关系，我们得

$$a_p = \frac{1}{n}\sum_{g\in G}\chi^{(p)*}(g)\chi(g)。 \tag{2.89}$$

即一个表示 $D(G)$ 中所含不可约表示 $\{D^{(p)}(g)\}$ 的重数可由特征标计算得到。还可以进一步得到

$$\sum_{g\in G}|\chi(g)|^2=\sum_{g\in G}\sum_r a_r\chi^{(r)^*}(g)\sum_s a_s\chi^{(s)}(g)$$
$$=\sum_{r,s}a_ra_s\sum_{g\in G}\chi^{(r)^*}(g)\chi^{(s)}(g)$$
$$=n\sum_{r,s}a_ra_s\delta_{rs}=n\sum_r a_r^2\geqslant n。\qquad(2.90)$$

如果 $D(G)$ 是不可约表示，则有

$$a_p=\begin{cases}1,（对某个\ p），\\0,其余。\end{cases}\qquad(2.91)$$

因此对不可约表示的特征标，一定有

$$\sum_{g\in G}|\chi(g)|^2=n。\qquad(2.92)$$

上式在判断一个表示是否是不可约表示时很有用。另外还可以证明，两个表示的特征标相同是它们互为等价的充要条件，即

特征标相同⇔两表示等价。

3. 正则表示

一个 n 阶群 G 有 n 个群元，如果把这些群元看成是 n 维线性矢量空间的基，$\{g_i, i=1, 2, \cdots, n\}$，则这组基可以负载群 G 的一个表示。这个表示称为正则表示。由于重排定理，我们可以把群元 g 看成是作用在这一矢量空间上的算子，其作用为

$$gg_i=g_j,\ \{g_i\}\xrightarrow{g}\{g_j\}。\qquad(2.93)$$

形式上可以将其改写为

$$gg_i=\sum_{j=1}^{n}D^{(c)}(g)_{ji}g_j,\ \forall g\in G,\qquad(2.94)$$

其中表示矩阵 $D^{(c)}(g)$ 定义为

$$D^{(c)}(g)_{ji}=\begin{cases}1,当\ gg_i=g_j,\\0,当\ gg_i\neq g_j。\end{cases}\qquad(2.95)$$

容易证明，$D^{(c)}(g)$构成群G的表示，即有

$$D^{(c)}(g_i g_j) = D^{(c)}(g_i)D^{(c)}(g_j)。\tag{2.96}$$

由定义可以看出，正则表示是n维表示，表示矩阵$D^{(c)}(g)$的每一行每一列只有一个元素为1，其余都为0。可以从群G的乘法表得出正则表示的矩阵。由定义可得$g = g_j g_i^{-1}$，即当$g_j g_i^{-1}$的乘积为g时，表示矩阵$D^{(c)}(g)$的第j行、第i列元素为1，其余皆为0。因此，只要作出$g_j \sim g_i^{-1}$的乘法表，凡是表中出现g的地方，则$D^{(c)}(g)$的相应位置就是1，其余就是0。这样即可得到表示矩阵$D^{(c)}(g)$。类似地可以写出所有群元的表示矩阵。显然，单位元的表示矩阵是n维单位矩阵。其余群元的表示矩阵的对角元皆为0。因此其特征标为

$$\chi^{(c)}(g) = \mathrm{tr}D^{(c)}(g) = \begin{cases} n, & g = e, \\ 0, & g \neq e。\end{cases} \tag{2.97}$$

G	g_1^{-1}	g_2^{1}	g_3^{-1}	…	g_n^{-1}
g_1	e			…	
g_2		e		…	
g_3			e	…	
…		…	…	…	
g_n					e

如对于G_4^2群，有正则表示

$$D^{(c)}(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ D^{(c)}(b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D^{(c)}(c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ D^{(c)}(e) = I。\tag{2.98}$$

容易看出正则表示是可约表示。将其按不可约表示进行分解

$$\chi^{(c)}(g)=\sum_p a_p^{(c)}\chi^{(p)}(g),\tag{2.99}$$

其中所含第 p 个不可约表示的重数为

$$\begin{aligned}a_p^{(c)}&=\frac{1}{n}\sum_{g\in G}\chi^{(p)^*}(g)\chi^{(c)}(g)=\frac{1}{n}\chi^{(p)^*}(e)\chi^{(c)}(e)\\&=\frac{1}{n}\cdot n\cdot d_p=d_p,\end{aligned}\tag{2.100}$$

其中 d_p 是群 G 第 p 个不可约表示的维数。上式表明,正则表示中包含的第 p 个不可约表示的重数正好是该表示的维数。对于 G_4^2 群,我们可以取变换矩阵

$$S=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&1&-1&-1\end{pmatrix}\tag{2.101}$$

将其约化为四个一维不可约表示。因为对任意的 p, $a_p^{(c)}=d_p\neq 0$,故正则表示中包含了群 G 的所有不可约表示。将 $a_p^{(c)}=d_p$ 代回方程(2.99),得

$$\chi^{(c)}(g)=\sum_p a_p^{(c)}\chi^{(p)}(g)=\sum_p d_p\chi^{(p)}(g),\tag{2.102}$$

取 $g=e$,得

$$\chi^{(c)}(e)=n=\sum_p a_p^{(c)}\chi^{(p)}(e)=\sum_p d_p^2=n。\tag{2.103}$$

这就是前面的定理 4。若 $g\neq e$,则

$$\chi^{(c)}(g)=0=\sum_p d_p\chi^{(p)}(g)=\sum_p\chi^{(p)}(e)\chi^{(p)}(g)=0,\tag{2.104}$$

这个式子可以推广为更加一般的公式

$$\frac{k_i}{n}\sum_p \chi^{(p)*}([g_i])\chi^{(p)}([g_j]) = \delta_{ij}。\tag{2.105}$$

这里$[g_i]$表示以 g_i 为代表元的共轭类,k_i 为该共轭类所包含的群元数。这给出了特征标满足的另一种正交关系,可以用来决定不可约表示的特征标。为证明这个公式,引入类矩阵

$$M_i^{(p)} = \sum_{g\in[g_i]} D^{(p)}(g)。\tag{2.106}$$

由于

$$\begin{aligned}
D^{(p)}(g)M_i^{(p)}D^{(p)-1}(g) &= \sum_{g'\in[g_i]} D^{(p)}(g)D^{(p)}(g')D^{(p)-1}(g) \\
&= \sum_{g'\in[g_i]} D^{(p)}(gg'g^{-1}) = \sum_{g'\in[g_i]} D^{(p)}(g') \\
&= M_i^{(p)},
\end{aligned}\tag{2.107}$$

根据舒尔引理可知,类矩阵一定是单位矩阵乘以常数,即

$$M_i^{(p)} = \lambda_i^{(p)} I,\tag{2.108}$$

进一步,由

$$\begin{aligned}
D^{(p)}M_i^{(p)}M_j^{(p)}D^{(p)-1} &= D^{(p)}M_i^{(p)}D^{(p)-1}D^{(p)}M_j^{(p)}D^{(p)-1} \\
&= M_i^{(p)}M_j^{(p)}
\end{aligned}\tag{2.109}$$

可知,类矩阵的乘积是类矩阵的线性组合:

$$M_i^{(p)}M_j^{(p)} = \sum_k C_{ij}^k M_k^{(p)}\tag{2.110}$$

或

$$\lambda_i^{(p)}\lambda_j^{(p)} = \sum_k C_{ij}^k \lambda_k^{(p)}。\tag{2.111}$$

对 $M_i^{(p)} = \lambda_i^{(p)} I$ 取迹,得

$$\mathrm{tr}M_i^{(p)} = k_i\chi^{(p)}(g_i) = d_p\lambda_i^{(p)} = \chi^{(p)}(e)\lambda_i^{(p)}$$

$$\to \lambda_i^{(p)} = k_i \frac{\chi^{(p)}(g_i)}{\chi^{(p)}(e)}。 \tag{2.112}$$

代入上式后得

$$\lambda_i^{(p)}\lambda_j^{(p)} = k_ik_j \frac{\chi^{(p)}(g_i)}{\chi^{(p)}(e)} \frac{\chi^{(p)}(g_j)}{\chi^{(p)}(e)} = \sum_l C_{ij}^l k_l \frac{\chi^{(p)}(g_l)}{\chi^{(p)}(e)}$$

$$\to \chi^{(p)}(g_i)\chi^{(p)}(g_j) = \frac{1}{k_ik_j}\sum_l C_{ij}^l k_l \chi^{(p)}(g_l)\chi^{(p)}(e)。 \tag{2.113}$$

对 p 求和,并利用 $\sum_p \chi^{(p)}(g_i)\chi^{(p)}(e) = n\delta_{1i}$ 得

$$\sum_p \chi^{(p)}(g_i)\chi^{(p)}(g_j) = \frac{1}{k_ik_j}\sum_l C_{ij}^l k_l \sum_p \chi^{(p)}(g_l)\chi^{(p)}(e)$$

$$= \frac{n}{k_ik_j}\sum_l C_{ij}^l k_l \delta_{l1} - \frac{n}{k_ik_j}C_{ij}^1。 \tag{2.114}$$

其中 C_{ij}^1 表示 $M_i^{(p)}$ 与 $M_j^{(p)}$ 之积中包含 $M_1^{(p)}$ 的数目。显然,当 $[g_j] = [g_i^{-1}]$ 时,求和中将包含 k_i 个 $M_1^{(p)}$,即

$$\sum_p \chi^{(p)}(g_i)\chi^{(p)}(g_j) = \frac{n}{k_ik_j}C_{ij}^1 = \frac{n}{k_i}\delta_{ij^{-1}}$$

$$\to \sum_p \chi^{(p)}(g_i)\chi^{(p)}(g_j^{-1}) = \sum_p \chi^{(p)}(g_i)\chi^{(p)*}(g_j) = \frac{n}{k_i}\delta_{ij} \tag{2.115}$$

若将 $\{r_i^{(p)}\} = \left\{\sqrt{\frac{k_i}{n}}\chi^{(p)}(g_i)\right\}$ 看成是 r 维的矢量(共有 l 个),则有

$$\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_j = \boldsymbol{\delta}_{ij}, \tag{2.116}$$

因此共轭类的数目不会大于不可约表示的数目,$l \leqslant r$。由此证明

了定理5。

4. 特征标表

通过定理4和定理5,我们可以确定群G有多少不可约表示以及不可约表示的维数。要构造出这些不可约表示有一定的难度,但我们可以构造出相应表示的特征标表。如对群G_6^2,共有三类,故有三个不可约表示,分别是一、一、二维表示。容易作出第一个表,其中未知的特征标用x, y, z, w表示。利用特征标的正交关系

$$\frac{1}{n}\sum_{g\in G}\chi^{(p)*}(g)\chi^{(q)}(g)=\delta_{pq} \tag{2.117}$$

G_6^2	e	$3a$	$2d$
$\Gamma^{(1)}$	1	1	1
$\Gamma^{(2)}$	1	x	y
$\Gamma^{(3)}$	2	z	w

G_6^2	e	$3a$	$2d$
$\Gamma^{(1)}$	1	1	1
$\Gamma^{(2)}$	1	−1	1
$\Gamma^{(3)}$	2	0	−1

和

$$\sum_{p}\chi^{(p)*}([g_i])\chi^{(p)}([g_j])=\frac{n}{k_i}\delta_{ij}, \tag{2.118}$$

可以得到方程

$$\begin{aligned}&1+3x+2y=0,\ 2+3z+2w=0,\\&1+x+2z=0,\ 1+y+2w=0,\end{aligned} \tag{2.119}$$

由此可以解出

$$x=-1,\ y=1,\ z=0,\ w=-1。 \tag{2.120}$$

类似地可以作出S_4群的特征标表。

S_4	e	6(12)	3(12)(34)	8(123)	6(1234)
$\Gamma^{(1)}$	1	1	1	1	1
$\Gamma^{(2)}$	1	−1	1	1	−1
$\Gamma^{(3)}$	2	0	2	−1	0
$\Gamma^{(4)}$	3	1	−1	0	−1
$\Gamma^{(5)}$	3	−1	−1	0	1

其中已经将置换写成了循环置换的记号。定义为

$$(12)=\begin{pmatrix}1234\\2134\end{pmatrix},\ (12)(34)=\begin{pmatrix}1234\\2143\end{pmatrix},$$
$$(123)=\begin{pmatrix}1234\\3124\end{pmatrix},\ (1234)=\begin{pmatrix}1234\\4123\end{pmatrix}。\tag{2.121}$$

§2.3 连续群和李群

前面讨论了有限群及其表示，在这一节将讨论另一类有广泛应用的群，即连续群或李群。限于课时，我们将不对李群理论作过多的讨论。对有限群，群元是分立的。而对于连续群，群元通常是用一个或一组连续参数来表征的。李群不仅仅是一个群，李群还是一个拓扑空间，并且是一个可微流形。我们通常用线性变换来定义李群，也就是说，可以用非奇异的矩阵来定义。在前面例3中，已经定义了由所有行列式不为零的 $n\times n$ 矩阵集合构成的群，即一般线性群 $GL(n,R)$ 或 $GL(n,C)$。我们感兴趣的是一般线性群的子群。

1. SO(3)群

考虑所有行列式不为零的 3×3 实正交矩阵组成的集合，显然，这个集合在矩阵乘法下构成群，称为 O(3)群。由正交条件

$A^{\mathrm{T}}A = I$ 可得

$$\det(A^{\mathrm{T}}A) = (\det A)^2 = 1 \rightarrow \det A = \pm 1。\quad (2.122)$$

因此 O(3)群按其行列式的值分为不连通的两支，其中 $\det A = +1$ 的部分包含了单位元，因而是 O(3)群的子群，记为 SO(3)。3×3 实矩阵共有九个参数，正交条件 $A^{\mathrm{T}}A = I$ 给出

$$\begin{aligned}(A^{\mathrm{T}}A)_{ii} &= \sum_{j=1}^{3} a_{ji}a_{ji} = \sum_{j=1}^{3} a_{ji}^2 = 1,\\ (A^{\mathrm{T}}A)_{ij} &= \sum_{k=1}^{3} a_{ki}a_{kj} = 0\ (i \neq j)。\end{aligned} \quad (2.123)$$

上式给出 $3 + 3 = 6$ 个约束条件，因此 O(3)群有三个独立参数，SO(3)群的独立参数也是三个，行列式等于 1 的条件并没有减少独立参数。第一个条件表明 $a_{ij}^2 \leqslant 1$，即群参数是在一个有限范围内取值，这种性质称为紧致性。如果把矩阵 A 看成是三维空间的线性变换矩阵，即

$$X' = AX,\ x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j, \quad (2.124)$$

则有

$$\begin{aligned}x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 &= X'^{\mathrm{T}}X' = X^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}AX\\ &= X^{\mathrm{T}}X = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2。\end{aligned} \quad (2.125)$$

因此，SO(3)群是使三维空间矢量长度不变的变换群。通常我们称 SO(3)群为三维空间的转动群。这很容易推广到 n 维空间的情况，保持 n 维矢量长度不变的线性变换群为 SO(n)群。容易证明，SO(n)群的独立参数共有 $n(n-1)/2$ 个。

也可以要求在变换时保持其他的量不变，比如，在洛伦兹变换下，要求四维间隔不变：

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - x_0'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2。\quad (2.126)$$

这个变换群称为 SO(3, 1) 群或洛伦兹群。一般地，保持

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2 \tag{2.127}$$

不变的变换群称为 SO(p, q) 群。

2. SU(2)群

现在来考虑一般线性群的另一个子群,特殊幺正群 SU(n)群。先考虑 $n = 2$ 的情况。所有满足幺正条件的 2×2 复矩阵构成群,即 U(2)群。幺正条件 $A^+ A = I$ 将给出

$$\begin{aligned} (A^+ A)_{ii} &= \sum_{j=1}^{2} a_{ji}^* a_{ji} = \sum_{j=1}^{2} |a_{ji}|^2 = 1, \\ (A^+ A)_{ij} &= \sum_{k=1}^{2} a_{ki}^* a_{kj} = 0 \ (i \neq j), \end{aligned} \tag{2.128}$$

以及

$$\det(A^+ A) = |\det A|^2 = 1 \rightarrow \det A = e^{i\delta}。 \tag{2.129}$$

行列式等于 1 的幺正群称为特殊幺正群,即 SU(2)群。这意味着在上式取 $\delta = 0$。2×2 的复矩阵共有八个实参数,约束条件共有 $2 + 2 + 1 = 5$ 个,故独立参数有三个。同样,我们有 $|a_{ij}|^2 \leqslant 1$。SU(2)群是紧致群。如果将其看成是复二维空间的线性变换,则有

$$X' = AX, \ x_i' = \sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_j, \tag{2.130}$$

$$\begin{aligned} |x_1'|^2 + |x_2'|^2 &= X'^+ X' = X^+ A^+ AX \\ &= X^+ X = |x_1|^2 + |x_2|^2, \end{aligned} \tag{2.131}$$

即 SU(2)群是保持复二维矢量模长不变的变换群。类似地,我们可以有保持复 n 维矢量模长不变的幺模幺正群 SU(n)。容易证明,SU(n)群的独立参数共有 $n^2 - 1$ 个。

我们将 SU(2)群的矩阵元写成:

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix},\ \det A=|a|^2+|b|^2=1。\tag{2.132}$$

进一步令

$$a=x_0+\mathrm{i}x_1,\ b=x_2+\mathrm{i}x_3,\tag{2.133}$$

则有

$$\det A=|a|^2+|b|^2=x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2=1。\tag{2.134}$$

这是四维空间中的三维球面 S^3。也就是说,SU(2) 群的参数空间是一个三维球面。U(1)群的群元可以写成(幺正性, $A^+A=I$)

$$A=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha},\ 0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi。\tag{2.135}$$

这是一个单位圆周 S^1。

3. 无穷小生成元和无穷小算符

设一个 r 参数的李群 G,其群元可以表示为

$$A(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_r)\in G,\tag{2.136}$$

其中参数值为 0 时对应单位元。即

$$A(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)=I。\tag{2.137}$$

可以将群元在单位元处做泰勒展开:

$$A(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_r)=A(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)+\sum_{i-1}^{r}\alpha_i\left.\frac{\partial A}{\partial\alpha_i}\right|_{\alpha_i=0}+\cdots=I+\sum_{i=1}^{r}\alpha_iX_i+\cdots,\tag{2.138}$$

其中

$$X_i=\left.\frac{\partial A}{\partial\alpha_i}\right|_{\alpha_i=0}\tag{2.139}$$

称为无穷小生成元。我们来考虑乘积$A^{-1}(\beta)A^{-1}(\gamma)A(\beta)A(\gamma)$的无穷小展开,

$$A^{-1}(\beta)A^{-1}(\gamma)A(\beta)A(\gamma) =$$

$$[I-\beta_i X_i+\cdots][I-\gamma_i X_i+\cdots][I+\beta_i X_i+\cdots][I+\gamma_i X_i+\cdots]$$

$$\approx I+\beta_i\gamma_j X_i X_j-\beta_j\gamma_i X_i X_j+\cdots = I+\beta_i\gamma_j[X_i, X_j]+\cdots \tag{2.140}$$

根据群的封闭性,这个乘积应该等于某个群元$A(\alpha)$,即

$$A^{-1}(\beta)A^{-1}(\gamma)A(\beta)A(\gamma) = I+\beta_i\gamma_j[X_i, X_j]+\cdots$$
$$= A(\alpha) = I+\alpha_i X_i+\cdots \tag{2.141}$$

由此可以得对易关系

$$[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k, \tag{2.142}$$

参数则满足关系

$$\alpha_k = C_{ij}^k\beta_i\gamma_j。 \tag{2.143}$$

常数C_{ij}^k称为李群的结构常数。结构常数C_{ij}^k具有下列性质:

(1) 下标反对称性:

$$C_{ij}^k = -C_{ji}^k, \ ([X_i, X_j] = -[X_j, X_i]); \tag{2.144}$$

(2) 满足雅可比(Jacobi)恒等式:

$$C_{ij}^l C_{lk}^m + C_{jk}^l C_{li}^m + C_{ki}^l C_{lj}^m = 0。 \tag{2.145}$$

这个可以从恒等式

$$[[X_i, X_j], X_k]+[[X_j, X_k], X_i]+[[X_k, X_i], X_j] = 0 \tag{2.146}$$

得到。上述两个关系式是李代数理论的基础。由无穷小生成元可以得到群元的一般形式,考虑SO(2)群作为例子,这是单参数李群,其群元可以写成

$$A(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}。\tag{2.147}$$

容易证明

$$A(\theta_1)A(\theta_2)=A(\theta_1+\theta_2)。\tag{2.148}$$

这实际上是绕 z 轴旋转 θ 角的转动矩阵。无穷小生成元为

$$X_\theta=\left.\frac{\partial A}{\partial\theta}\right|_{\theta=0}=\begin{pmatrix}-\sin\theta & -\cos\theta\\ \cos\theta & -\sin\theta\end{pmatrix}_{\theta=0}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}。\tag{2.149}$$

在单位元附近(即转角很小时),群元可以写成

$$A(\delta\theta)=I+\delta\theta X_\theta+\cdots=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\delta\theta\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\cdots\tag{2.150}$$

当转角有限时,令 $\delta\theta=\theta/N$, N 充分大,则

$$\begin{aligned}A(\theta)&=A(N\cdot\theta/N)=A(\theta/N+\theta/N+\cdots+\theta/N)\\&=A(\theta/N)A(\theta/N)\cdots A(\theta/N)=[I+(\theta/N)X_\theta]^N\\&=[I+(\theta X_\theta/N)]^N\rightarrow\exp[\theta X_\theta]=\sum_{n=0}\frac{1}{n!}[\theta X_\theta]^n。\end{aligned}\tag{2.151}$$

由

$$X_\theta^2=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}^2=-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=-I,\ X_\theta^3=-IX_\theta=-X_\theta,\tag{2.152}$$

可得

$$\begin{aligned}A(\theta)&=\sum_{m=0}\frac{1}{(2m)!}(\theta X_\theta)^{2m}+\sum_{m=0}\frac{1}{(2m+1)!}(\theta X_\theta)^{2m+1}\\&=\sum_{m=0}\frac{(-1)^m}{(2m)!}(\theta)^{2m}I+\sum_{m=0}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}(\theta)^{2m+1}X_\theta\end{aligned}$$

$$= I\cos\theta + X_\theta \sin\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}。 \tag{2.153}$$

一般地，将有

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) = \exp\Big[\sum_{i=1} \alpha_i X_i\Big]。 \tag{2.154}$$

行列式等于 1 将给出

$$\det A = \det\Big\{\exp\Big[\sum_{i=1} \alpha_i X_i\Big]\Big\} = \exp\Big[\mathrm{tr}\sum_{i=1} \alpha_i X_i\Big]$$

$$= \exp\Big[\sum_{i=1} \alpha_i \mathrm{tr} X_i\Big] = 1 \rightarrow \mathrm{tr} X_i = 0, \tag{2.155}$$

即幺模群的无穷小生成元一定是无迹的。

下面考虑 SO(3)群。这是三维空间的转动群，有三个独立参数。采取如下的参数化方式：先绕 x 轴旋转 α_1 角，然后绕 y 轴旋转 α_2 角，最后再绕 z 轴旋转 α_3 角。因此群元可写成

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = A_z(\alpha_3) A_y(\alpha_2) A_x(\alpha_1) =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha_2\cos\alpha_3 & -\cos\alpha_1\sin\alpha_3 + \sin\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_3 & \sin\alpha_1\sin\alpha_3 + \cos\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_3 \\ \cos\alpha_2\sin\alpha_3 & \cos\alpha_1\cos\alpha_3 + \sin\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3 & -\sin\alpha_1\cos\alpha_3 + \cos\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3 \\ -\sin\alpha_2 & \sin\alpha_1\cos\alpha_2 & \cos\alpha_1\cos\alpha_2 \end{pmatrix}, \tag{2.156}$$

其中 $-\pi \leqslant \alpha_1 \leqslant \pi$，$-\pi \leqslant \alpha_2 \leqslant \pi$，$-\pi/2 \leqslant \alpha_3 \leqslant \pi/2$。单位元

$$I = A(0, 0, 0)。 \tag{2.157}$$

按定义可得

$$X_1 = \frac{\partial A}{\partial \alpha_1}\Big|_{\alpha_i=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_2 = \frac{\partial A}{\partial \alpha_2}\Big|_{\alpha_i=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_3 = \frac{\partial A}{\partial \alpha_3}\bigg|_{\alpha_i=0} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}。 \tag{2.158}$$

直接计算可得无穷小生成元之间的对易关系

$$[X_1, X_2] = X_3, [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = X_2, \tag{2.159}$$

或

$$[X_i, X_j] = \varepsilon_{ijk} X_k。 \tag{2.160}$$

其中 ε_{ijk} 是三阶全反对称张量，$\varepsilon_{123}=1$。我们可以将群元写成

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \exp[\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3]。 \tag{2.161}$$

对 SU(2)群，也是三个独立参数。群元可写成

$$A(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \ |a|^2 + |b|^2 = 1。 \tag{2.162}$$

引入参数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$，使

$$\begin{aligned} a &= \left(\cos\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_2}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_3/2}, \\ b &= -\cos\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_2}{2}。 \end{aligned} \tag{2.163}$$

$$A = A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) =$$

$$\begin{bmatrix} \left(\cos\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_2}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_3/2} & -\cos\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_2}{2} \\ \cos\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_2}{2} & \left(\cos\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_2}{2} - \mathrm{i}\sin\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_3/2} \end{bmatrix}, \tag{2.164}$$

其中 $-2\pi \leqslant \alpha_1 \leqslant 2\pi$, $-2\pi \leqslant \alpha_2 \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \alpha_3 \leqslant \pi$。单位元

$$I = A(0, 0, 0)。 \tag{2.165}$$

容易计算

$$X_1 = \frac{\partial A}{\partial \alpha_1}\bigg|_{\alpha=0} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_1,$$

$$X_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_2, \tag{2.166}$$

$$X_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_3,$$

其中 σ_i 是三个泡利矩阵。直接计算即得对易关系

$$[X_i, X_j] \doteq \varepsilon_{ijk} X_k, \ [\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k。 \tag{2.167}$$

可以看到,SU(2)群的无穷小生成元满足和 SO(3)群相同的对易关系。我们说,它们对应的李代数是同构的。

现在我们来考虑李群对矢量的变换。以 SO(2)群为例,一个二维空间(在 x-y 平面)内的矢量

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{2.168}$$

在 SO(2)群的作用变换下变为

$$X \to X' = A(\theta)X。 \tag{2.169}$$

考虑无穷小变换,

$$A = I + \varepsilon, \text{由 } A^{\mathrm{T}}A = I, \ A^{\mathrm{T}} = A^{-1} \to \varepsilon^{\mathrm{T}} = -\varepsilon, \tag{2.170}$$

可得 ε 为反对称矩阵。即

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & -\delta\theta \\ \delta\theta & 0 \end{pmatrix}。 \tag{2.171}$$

若记 $X' = AX = (I+\varepsilon)X = X + \mathrm{d}X$,则

$$\mathrm{d}X = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x_1 \\ \mathrm{d}x_2 \end{pmatrix} = \varepsilon X = \begin{pmatrix} 0 & -\delta\theta \\ \delta\theta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1(x)\delta\theta \\ U_2(x)\delta\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2\delta\theta \\ x_1\delta\theta \end{pmatrix}。 \tag{2.172}$$

定义无穷小算符

$$\widehat{X}_\theta = U_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} = -x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2} = \mathrm{i}\hat{J}_z。\quad(2.173)$$

这正是二维空间的角动量算符(只相差因子 i)。函数的无穷小变换可以写成

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{x}+\mathrm{d}\boldsymbol{x}) &= F(\boldsymbol{x}) + \mathrm{d}F(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x}) + \mathrm{d}x^i\partial_i F(\boldsymbol{x}) \\ &= F(\boldsymbol{x}) + \partial_i F(\boldsymbol{x})U_i(x)\delta\theta = [1+\delta\theta\widehat{X}_\theta]F(\boldsymbol{x}) \\ &= [1+\mathrm{i}\delta\theta\hat{J}_z]F(\boldsymbol{x})。\end{aligned}\quad(2.174)$$

有限变换就可以写成

$$F(\boldsymbol{x}) \to F(\boldsymbol{x}') = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta\hat{J}_z}F(\boldsymbol{x})。\quad(2.175)$$

对于多参数李群,上述结果可以推广为

$$\mathrm{d}X = \varepsilon X,\ \mathrm{d}x_i = U_{\lambda,i}(\boldsymbol{x})\delta\alpha_\lambda,\ \widehat{X}_\lambda = U_{\lambda,i}(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial x_i}。\quad(2.176)$$

可以证明,无穷小算符满足和无穷小生成元相同的对易关系:

$$[\widehat{X}_i, \widehat{X}_j] = C_{ij}^k\widehat{X}_k。\quad(2.177)$$

对 SO(3)群,将无穷小变换矩阵写成

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = I+\varepsilon = I + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}。\quad(2.178)$$

由 $X \to X' = AX = (I+\varepsilon)X = X + \mathrm{d}X$ 得

$$\mathrm{d}X = \varepsilon X = \begin{pmatrix} -\alpha_3 y + \alpha_2 z \\ \alpha_3 x - \alpha_1 z \\ -\alpha_2 x + \alpha_1 y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{1,x}\alpha_1 + U_{2,x}\alpha_2 + U_{3,x}\alpha_3 \\ U_{1,y}\alpha_1 + U_{2,y}\alpha_2 + U_{3,y}\alpha_3 \\ U_{1,z}\alpha_1 + U_{2,z}\alpha_2 + U_{3,z}\alpha_3 \end{pmatrix}。\quad(2.179)$$

由此可得无穷小算符

$$\hat{X}_1 = U_{1,i}\frac{\partial}{\partial x_i} = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y},\ \hat{X}_2 = U_{2,i}\frac{\partial}{\partial x_i} = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\hat{X}_3 = U_{3,i}\frac{\partial}{\partial x_i} = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}, \tag{2.180}$$

对易关系为

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = -\varepsilon_{ijk}\hat{X}_k。 \tag{2.181}$$

定义

$$\hat{J}_i = -\mathrm{i}\hat{X}_i, \tag{2.182}$$

则$\hat{J}_i$满足对易关系

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = \mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\hat{J}_k。 \tag{2.183}$$

$\hat{J}_i$就是通常的角动量算符。

对 SU(2)群，考虑复二维空间的变换，

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \tag{2.184}$$

对无穷小变换可令 $A = I + \varepsilon$，因为 SU(2)群是幺正群，

$$A^{+}A = I = (I+\varepsilon^{+})(I+\varepsilon) = I + (\varepsilon+\varepsilon^{+}), \tag{2.185}$$

所以有 $\varepsilon^{+} = -\varepsilon$。可以令

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i}\alpha_3 & -\alpha_2+\mathrm{i}\alpha_1 \\ \alpha_2+\mathrm{i}\alpha_1 & -\mathrm{i}\alpha_3 \end{pmatrix}。 \tag{2.186}$$

容易求得相应的无穷小算符

$$\hat{X}_1 = \frac{\mathrm{i}}{2}\left(v\frac{\partial}{\partial u} + u\frac{\partial}{\partial v}\right) = \mathrm{i}\hat{S}_x,$$

$$\hat{X}_2 = \frac{1}{2}\left(-v\frac{\partial}{\partial u} + u\frac{\partial}{\partial v}\right) = \mathrm{i}\hat{S}_y,$$

$$\widehat{X}_3=\frac{\mathrm{i}}{2}\left(u\frac{\partial}{\partial u}-v\frac{\partial}{\partial v}\right)=\mathrm{i}\,\widehat{S}_z。\tag{2.187}$$

对易关系为

$$[\widehat{X}_i,\ \widehat{X}_j]=-\varepsilon_{ijk}\widehat{X}_k,\ [\widehat{S}_i,\ \widehat{S}_j]=\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\widehat{S}_k。\tag{2.188}$$

满足和 SO(3)群同样的对易关系。$\widehat{S}_i$ 为自旋角动量算符。

4. SU(2)群的不可约表示

SU(2)群的基本表示是 2×2 的幺正幺模矩阵群，可以写成

$$A(a,\ b)=\begin{pmatrix}a & b\\ -b^* & a^*\end{pmatrix},\ |a|^2+|b|^2=1。\tag{2.189}$$

这显然是不可约表示。定义函数 $f(u_1,\ u_2)$，对任意 $g\in \mathrm{SU}(2)$，有算子 $\Gamma_{g^{-1}}$ 与之对应，并有

$$\begin{gathered}\Gamma_{g^{-1}}f(u_1,\ u_2)=f(gu)=f(u_1',\ u_2'),\\ u'=\begin{pmatrix}u_1'\\ u_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ -b^* & a^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}。\end{gathered}\tag{2.190}$$

考虑 $\Gamma_G(G=\mathrm{SU}(2))$ 对函数族 $\{f_m(u)\}$ 的作用，如果

$$\begin{aligned}\Gamma_{g^{-1}}f_m(u_1,\ u_2)&=f_m(gu)=f_m(u_1',\ u_2')\\ &=\sum_{m'}D(g^{-1})_{m'm}f_{m'}(u_1,\ u_2),\ \forall g\in \mathrm{SU}(2)\end{aligned}\tag{2.191}$$

则可以证明 $\{f_m(u)\}$ 负载了 SU(2)群的一个表示。作

$$\begin{gathered}f_m^{(l)}(u_1,\ u_2)=[(l+m)!(l-m)!]^{-1/2}u_1^{l+m}u_2^{l-m},\\ m=-l,\ -l+1,\ \cdots,\ l-1,\ l,\end{gathered}\tag{2.192}$$

其中 $l\pm m$ 为整数，l 可以是半整数、整数或零。当 l 固定时，共有 $2l+1$ 个函数 $\{f_m^{(l)}(u)\}$。将其代入方程(2.191)，可以得到

$$\Gamma_{g^{-1}} f_m^{(l)}(u_1, u_2) = f_m^{(l)}(u_1', u_2') = [(l+m)!(l-m)!]^{-1/2} u_1'^{l+m} u_2'^{l-m}$$

$$= [(l+m)!(l-m)!]^{-1/2}(au_1 + bu_2)^{l+m}(-b^* u_1 + a^* u_2)^{l-m}$$

$$= \sum_{\mu,\nu} [(l+m)!(l-m)!]^{-1/2} \frac{(l+m)!}{(l+m-\mu)!\mu!} \frac{(l-m)!}{(l-m-\nu)!\nu!}$$

$$\cdot a^{l+m-\mu} b^{\mu} (-b^*)^{l-m-\nu} (a^*)^{\nu} u_1^{2l-\mu-\nu} u_2^{\mu+\nu}。 \tag{2.193}$$

在上述求和中代换 $2l-\mu-\nu = l+m'$，$\mu+\nu = l-m'$，则有

$$\Gamma_{g^{-1}} f_m^{(l)}(u_1, u_2) = \sum_{m',\nu} [(l+m')!(l-m')!]^{-1/2}$$

$$\cdot \frac{\sqrt{(l+m)!(l-m)!(l+m')!(l-m')!}}{(l+m-\mu)!\mu!(l-m'-\mu)!(\mu+m'-m)!}$$

$$\cdot a^{l+m-\mu} (a^*)^{l-m'-\mu} b^{\mu} (-b^*)^{\mu+m'-m} u_1^{l+m'} u_2^{l-m'}$$

$$= \sum_{m'} D^{(l)}(g^{-1})_{m'm} f_{m'}^{(l)}(u_1, u_2), \tag{2.194}$$

其中

$$D^{(l)}(g^{-1})_{m'm} = D^{(l)}(a, b)_{m'm}$$

$$= \sum_{\mu} \frac{\sqrt{(l+m)!(l-m)!(l+m')!(l-m')!}}{(l+m-\mu)!\mu!(l-m'-\mu)!(\mu+m'-m)!}$$

$$\cdot a^{l+m-\mu} (a^*)^{l-m'-\mu} b^{\mu} (-b^*)^{\mu+m'-m}。 \tag{2.195}$$

这里定义的矩阵 $D^{(l)}(g^{-1})$是 SU(2)群的一个表示，这是一个 $2l+1$ 维的表示。不同的 l 给出不同的表示，l 可以取 0，1/2，1，3/2，…等。可以证明这个表示是幺正表示，并且是不可约表示。因此 SU(2)群有无穷多个不可约表示。可以证明，集合$\{D^{(l)}(a, b)\}$包含了 SU(2)群的所有不等价的不可约表示，即 $\{D^{(l)}(a, b), l = 0, 1/2, 1, 3/2, \cdots\}$ 是完全的。

下面我们考虑 SU(2) 群与 SO(3)群之间的关系。由泡利矩阵 σ_i 定义：

$$X=\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x}=\sigma_i x_i=\begin{pmatrix} z & x-\mathrm{i}y \\ x+\mathrm{i}y & -z\end{pmatrix}。\tag{2.196}$$

由

$$A(a,b)=\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^*\end{pmatrix}\in \mathrm{SU}(2)\tag{2.197}$$

定义变换

$$\begin{aligned}X\to X'=AXA^{-1}&=\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & x-\mathrm{i}y \\ x+\mathrm{i}y & -z\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^* & -b \\ b^* & a\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix} z' & x'-\mathrm{i}y' \\ x'+\mathrm{i}y' & -z'\end{pmatrix}=\Gamma_g X。\end{aligned}\tag{2.198}$$

可以证明 Γ_g 是 SU(2)群的同态：

$$\begin{aligned}X'&=\Gamma_A X=AXA^{-1},\\ X''&=\Gamma_{A'}X'=\Gamma_{A'}\Gamma_A X=A'X'A'^{-1}=A'AXA^{-1}A'^{-1}\\ &=(A'A)X(A'A)^{-1}=\Gamma_{A'A}X。\end{aligned}\tag{2.199}$$

对 X 取行列式，得

$$\begin{aligned}&\det X'=\det(AXA^{-1})=\det A\\ &\Rightarrow x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2,\end{aligned}\tag{2.200}$$

即上述变换保持 $x^2+y^2+z^2$ 不变，将其重新写成三维矢量变换形式，有

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z'\end{pmatrix}=D(a,b)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix},$$

$$D(a,b)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a^2+a^{*2}-b^2-b^{*2}) & \frac{\mathrm{i}}{2}(a^2-a^{*2}+b^2-b^{*2}) & -(ab+a^*b^*) \\ \frac{\mathrm{i}}{2}(a^{*2}-a^2+b^2-b^{*2}) & \frac{1}{2}(a^2+a^{*2}+b^2+b^{*2}) & \mathrm{i}(ab-a^*b^*) \\ ab^*+a^*b & \mathrm{i}(ab^*-a^*b) & aa^*-bb^*\end{pmatrix}。\tag{2.201}$$

可以证明，

$$D^{\mathrm{T}}(a,\ b) = D^{-1}(a,\ b),\ \det D(a,\ b) = 1, \qquad (2.202)$$

即 $D(a,\ b) \in \mathrm{SO}(3)$。由此，找到了 SU(2) 群和 SO(3) 群之间的一个对应。因此，SU(2) 群和 SO(3) 群同态。如果取

$$a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma/2},\ b = 0, \qquad (2.203)$$

则得

$$D(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma/2},\ 0) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}。 \qquad (2.204)$$

这是绕 z 轴转 γ 角的转动变换矩阵。若取

$$a = \cos(\beta/2),\ b = -\sin(\beta/2), \qquad (2.205)$$

则得

$$D(\cos(\beta/2),\ -\sin(\beta/2)) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}, \qquad (2.206)$$

这是 y 轴转 β 角的转动变换矩阵。一般地，取

$$a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\gamma)/2}\cos(\beta/2),\ b = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\gamma)/2}\sin(\beta/2), \qquad (2.207)$$

则有

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\gamma)/2}\cos(\beta/2) & -\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\gamma)/2}\sin(\beta/2) \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\alpha-\gamma)/2}\sin(\beta/2) & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\alpha+\gamma)/2}\cos(\beta/2) \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2), \qquad (2.208)$$

$$D(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma & -\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma & -\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\beta\cos\gamma & \sin\beta\sin\gamma & \cos\beta \end{pmatrix}, \qquad (2.209)$$

这正是以欧拉角 α，β，γ 表示的三维转动矩阵，可以看成是三个逐次旋转的乘积。当取 $\alpha=\beta=\gamma=0$ 时，

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=I_2 \tag{2.210}$$

为单位矩阵。当 $\alpha=2\pi$，$\beta=\gamma=0$，

$$A=-I_2。 \tag{2.211}$$

但不论 $\alpha=\beta=\gamma=0$ 或者 $\alpha=2\pi$，$\beta=\gamma=0$，都有

$$D(0,\ 0,\ 0)=D(2\pi,\ 0,\ 0)=I_3。 \tag{2.212}$$

因此，有对应

$$(I_2,\ -I_2)\rightarrow I_3, \tag{2.213}$$

这是 2-1 对应。对任意 $A\in \mathrm{SU}(2)$，存在对应

$$(IA,\ -IA)\rightarrow D(\alpha,\ \beta,\ \gamma)\in \mathrm{SO}(3)。 \tag{2.214}$$

对 SU(2)群的任意不可约表示 $D^{(l)}(a,\ b)=D^{(l)}(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$，当 $l=$ 整数时，有

$$D^{(l)}(-IA)=D^{(l)}(A), \tag{2.215}$$

故同时也是 SO(3)群的不可约表示。可以证明，$D^{(l)}(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$作为 SO(3)群的不可约表示是完全的。而当 $l=$ 半整数时，由于

$$D^{(l)}(-IA)=-D^{(l)}(A), \tag{2.216}$$

故不是 SO(3)群的不可约表示。

5. 李代数

定义　设 L 是在数域 **R** 或 **C** 上的一个有限维线性向量空间，存在一个线性映射：$L\times L\rightarrow L$，当 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}\in L$ 时，有 $[\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}]\in L$。其中运算$[\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}]$满足下列条件

(1) 封闭性

$$[\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j] = C_{ij}^k \boldsymbol{x}_k, \ \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{x}_k \in L, C_{ij}^k \in R(C), \tag{2.217}$$

(2) 线性

$$[a\boldsymbol{x}_i + b\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{y}] = a[\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}] + b[\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{y}], \ a, b \in R(C), \tag{2.218}$$

(3) 反对称性

$$[\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j] = -[\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{x}_i], \tag{2.219}$$

(4) 雅可比恒等式

$$[\boldsymbol{x}_i, [\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{x}_k]] + [\boldsymbol{x}_j, [\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_i]] + [\boldsymbol{x}_k, [\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j]] = 0$$

$$\Rightarrow C_{ij}^l C_{lk}^m + C_{jk}^l C_{li}^m + C_{ki}^l C_{lj}^m = 0。\tag{2.220}$$

则称 L 是一个李代数,向量空间的维数即为李代数的维数,记为 $\dim L$。每个李群都有对应的李代数。李代数同样有子代数、不变子代数(又称理想)、同态和同构等概念,在此我们不再讨论,有兴趣的读者可以参见相关著作。我们只简单介绍一下李代数的表示。

对于李代数 L,如果有一组 $n \times n$ 的矩阵 $\Gamma(L)$ 与之对应,当 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$ 时,有

$$\Gamma(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}) = a\Gamma(\boldsymbol{x}) + b\Gamma(\boldsymbol{y}), \ a, b \in R(C), \tag{2.221}$$

$$\Gamma([\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]) = [\Gamma(\boldsymbol{x}), \Gamma(\boldsymbol{y})], \ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L, \tag{2.222}$$

则称矩阵集合 $\{\Gamma(\boldsymbol{x})\}$ 为李代数 L 的 n 维表示。实际上 $\{\Gamma(\boldsymbol{x})\}$ 是与 L 同构的矩阵李代数。群表示理论中的许多概念、定理等都可用于李代数的表示。

6. 开西米尔(Casimir)算符

定义

$$g_{ij} = C_{ik}^l C_{jl}^k, \tag{2.223}$$

称为由结构常数定义的度规张量,由此可以定义开西米尔算符

$$\widehat{C}=g^{ij}\widehat{X}_i\widehat{X}_j,\tag{2.224}$$

g^{ij}是g_{ij}的逆。可以证明,开西米尔算符$\widehat{C}$与所有$\widehat{X}_i$对易,

$$[\widehat{C},\widehat{X}_i]=0。\tag{2.225}$$

对于SO(3)群,我们有

$$g_{ij}=\epsilon_{ikl}\epsilon_{jlk}=-2\delta_{ij},\ g^{ij}=-\frac{1}{2}\delta^{ij},\tag{2.226}$$

$$\begin{aligned}\widehat{C}=g^{ij}\widehat{X}_i\widehat{X}_j&=-\frac{1}{2}(\widehat{X}_1^2+\widehat{X}_2^2+\widehat{X}_3^2)\\&=\frac{1}{2}(\hat{J}_1^2+\hat{J}_2^2+\hat{J}_3^2)=\frac{1}{2}\hat{J}^2\end{aligned}\tag{2.227}$$

即为总角动量平方。因此,总角动量平方与任意一个角动量分量对易,它们具有共同的本征态。球谐函数$Y_{lm}(\theta,\phi)$即可作为相应的本征函数。我们有

$$\hat{J}^2\mid l,m\rangle=l(l+1)\mid l,m\rangle,\ \hat{J}_z\mid l,m\rangle=m\mid l,m\rangle。\tag{2.228}$$

利用转动群的不可约表示,我们还可以讨论两个角动量的耦合以及CG(Clebsch-Gordan)系数。有兴趣的读者可参阅有关著作。

§2.4 规范不变性

1. 自然界的基本相互作用

自然界存在四种基本相互作用,电磁作用、弱作用、强作用和引力相互作用。人们早就知道电磁相互作用理论是一种规范理论。从20世纪50年代起,人们就猜测弱作用和强作用也可以用规范场描述。但在杂乱无章的强子物理没有纳入到更基本的夸克框架前,这样的规范理论是发展不起来的。四种相互作用在很大程度上取决于传递相互作用的量子的特性,被交换粒子的质量决定于力的作用范围,只有交换无质量粒子的力才是长程的。对于

所有的粒子而言，引力是一种吸引力，它随着相互作用的距离较缓慢地下降。强相互作用和弱相互作用局限于核子内部，在核外它们以指数迅速下降。由于正负电荷相互吸引，正负电荷相互抵消，在较大尺度上电磁力将被屏蔽，所以宏观物体表现为电中性的，虽然在微观尺度上引力极为微弱，但决定宇宙间宏观结构的是引力。

爱因斯坦的广义相对论将引力和几何紧密地联系起来了，引力是建立在仿射联络这样一个几何对象的基础上，后者由矢量的平行移动来定义。所以决定了局部时空坐标系的相对定向。早在 1918 年，外尔(H. Weyl)就考虑了几何概念是否能推广到自然界的其他种类的力。外尔提出了一种广义联络，后者路径依赖在不同时空点上矢量长度的比较值。这个想法被称作标度或规范不变性。然而，由于它看上去与现实世界中的真实质量标度不符，从而一度被舍弃。规范对称性局部特性的中心思想在外尔本人的大力推动下开始复兴，并由杨振宁和米尔斯(R. L. Mills)的工作发扬光大。

诸如狭义相对论的洛伦兹不变性那样的许多熟知的对称性是整体的，它们对于所有的时空点都有相同的变换。与此相反，在变换群 G 下的不变理论，其变换依赖于时空点的话，通常就应当在理论中引入新的场。例如，爱因斯坦广义相对论的等效原理允许引入一个局部惯性系，即有一个局部的洛伦兹不变性。我们可以将广义相对论看成是一个具有齐次洛伦兹群作为规范群的规范理论。一般而言，任何整体不变理论能够被推广到局部不变理论，在此同时必须引入一类新的场参与动力学之中，这些新的场称为规范场。广义相对论的规范场是标架场。规范场与物质场的耦合几乎完全决定于局部不变性的要求。

2. U(1)规范理论

如果物质场 ψ(电子和正电子)满足欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{\partial L_M}{\partial \psi} = \partial_\mu \frac{\partial L_M}{\partial \psi_{,\mu}}, \tag{2.229}$$

其中 L_M 是 ψ 场的洛伦兹不变函数，并且附加一个整体相位不变性

$$\psi(x) \rightarrow \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\epsilon}\psi(x), \tag{2.230}$$

在以电荷 e 为单位时，q 是个整数。所有的相位因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$ 组成了最简单的李群 U(1)，李群的元是可微的

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} = \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\alpha+\pi/2]} = U\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right), \tag{2.231}$$

$\mathrm{d}U/\mathrm{d}\alpha$ 也是 U(1)的群元。利用诺特定理，U(1)对称性导致了守恒律 $\partial_\mu J^\mu = 0$，其中

$$J^\mu = -\mathrm{i}\mathrm{e}\frac{\partial L_M}{\partial \psi_{,\mu}}q\psi。 \tag{2.232}$$

如果 ϵ 依赖于时空点 x，整体变换就推广到局部规范变换

$$\psi(x) \rightarrow \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\epsilon(x)}\psi(x)。 \tag{2.233}$$

局部规范变换一般将不保留拉格朗日密度 $L_M(\psi, \partial_\mu\psi)$ 的不变性。为了得到局部规范不变理论，一种自然的方式是引入一个附加的矢量场 A_μ，并定义协变导数 $D_\mu\psi$

$$D_\mu\psi = (\partial_\mu - \mathrm{i}\mathrm{e}qA_\mu)\psi。 \tag{2.234}$$

于是，有

$$(\partial_\mu - \mathrm{i}\mathrm{e}qA'_\mu)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\epsilon(x)}\psi = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\epsilon(x)}(\partial_\mu - \mathrm{i}\mathrm{e}qA_\mu)\psi, \tag{2.235}$$

即

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{\mathrm{e}}\partial_\mu\epsilon(x)。 \tag{2.236}$$

矢势 A_μ，即光子场作为 U(1)规范理论的规范场出现在动力学系统中了。在局部规范群 U(1)中，新的拉格朗日函数 $L_M(\psi, D_\mu\psi)$ 是不变的。这个拉格朗日函数通过 $D_\mu\psi$ 项自动描述了 A_μ 和 ψ 场之间的耦合。为了完备起见，规范场的拉格朗日密度 L_F 也必须加入，

$$L_F = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{2.237}$$

其中

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{2.238}$$

所以体系总的拉格朗日密度为 $L = L_F + L_M$。值得注意的是，规范场的质量项 $m^2 A_\mu A^\mu$ 不是规范不变的，所以经典规范场应当是无质量的。

3. 非阿贝尔规范理论

设规范群为非阿贝尔李群 G(例如 SU(2)、SU(2)×U(1)，SU(3)等)。不同的物质场(轻子、夸克等)依照群 G 的各种不可约表示进行变换。一般而言，$\psi \equiv (\psi_A)$，ψ_A 是 G 的不可约表示的分量。拉格朗日函数 $L_M(\psi, \partial\psi)$在群 G 下是整体不变的，即对于 G 的所有群元有

$$L_M(U(g)\psi, \partial(U(g)\psi)) = L_M(\psi, \partial\psi)。 \tag{2.239}$$

依照诺特定理，将导致守恒律。

李群 G 的李代数可用下述方式定义。李代数 $\mathfrak{g}$ 是 G 的单位元 e 上的切空间。在参数化 $g(s) \in G$, $g(0) = e$ 中，$\mathfrak{g}$ 的元 X 是群元的导数

$$X \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}g(s)\Big|_{s=0}。 \tag{2.240}$$

局部规范理论是在下述变换下不变，该变换依赖于时空点 x

$$\phi(x) \to U(g(x))\phi(x)。 \tag{2.241}$$

设 $T_a \in \mathfrak{g}$ 是 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的基，引入矢量场

$$A_\mu(x) = \sum_a A_\mu^a(x)T_a = A_\mu^a(x)T_a, \tag{2.242}$$

$A_\mu(x)$被称为具有李代数值的矢量场。用协变导数

$$D_\mu\psi = \partial_\mu\psi + U_*(A_\mu)\psi \tag{2.243}$$

来替代$\partial_\mu\psi$，其中$U_*(A_\mu)$标记对应$U(g)$的李代数表示。与前面讨论相仿，要求在规范变换下$D_\mu\psi$精确地满足

$$D'_\mu[U(g(x))\psi] = U(g(x))D_\mu\psi, \tag{2.244}$$

其中$D'_\mu = \partial_\mu + U_*(A'_\mu)$。由(2.244)式，可导出$A_\mu(x)$的变换定律

$$\begin{aligned}&\partial_\mu[U(g)\psi(x)] + U_*(A'_\mu)[U(g)\psi(x)]\\&= U(g)[\partial_\mu\psi(x) + U_*(A_\mu)]\psi(x)\end{aligned} \tag{2.245}$$

(2.245)式对任意的$\psi(x)$成立，所以必须有

$$\partial_\mu U(g) + U_*(A'_\mu)U(g) = U(g)U_*(A_\mu)。 \tag{2.246}$$

方程两边右乘$U^{-1}(g)$，有

$$U_*(A'_\mu) = U(g)U_*(A_\mu)U^{-1}(g) - [\partial_\mu U(g)]U^{-1}(g), \tag{2.247}$$

对于恒等表示，$g \to g$，(2.247) 式约化为

$$A'_\mu(x) = g(x)A_\mu(x)g^{-1}(x) - [\partial_\mu g(x)]g^{-1}(x)。 \tag{2.248}$$

对于无穷小变换，

$$g(s,\ x) \equiv g(0,\ x) + s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}g(s,\ x)\,|_{s=0} = \mathrm{e} + sT(x), \tag{2.249}$$

可以得到

$$\delta A^a_\mu(x)T_a = A'_\mu(x) - A_\mu(x) = [T(x),\ A_\mu(x)] - \partial_\mu T(x),\ T \in G。 \tag{2.250}$$

利用

$$T(x) = \varepsilon^a(x)T_a(x)。 \tag{2.251}$$

我们可以将(2.250)式写成分量形式

$$\delta A_{\mu}^{a}(x)T_{a}-[\varepsilon^{b}T_{b},A_{\mu}^{c}(x)T_{c}]-\partial_{\mu}\varepsilon^{a}T_{a}$$

$$=[T_{b},T_{c}]\varepsilon^{b}A_{\mu}^{c}(x)-\partial_{\mu}\varepsilon^{a}T_{a}。\quad(2.252)$$

李代数的生成元满足对易关系

$$[T_{b},T_{c}]=f_{bc}^{a}T_{a},\quad(2.253)$$

其中结构常数 f_{bc}^{a} 由生成元唯一确定。所以

$$\delta A_{\mu}^{a}(x)=f_{bc}^{a}\varepsilon^{b}A_{\mu}^{c}(x)-\partial_{\mu}\varepsilon^{a}。\quad(2.254)$$

其中 μ 是时空指标，a, b, c 是李代数分量指标。整体不变的拉格朗日函数 $L_{M}(\psi,\partial\psi)$ 蕴涵着在局部变换下新的拉格朗日函数 $L_{M}(\psi,D\psi)$ 是不变的。可以证明，洛伦兹不变和规范不变的拉格朗日量为

$$L_{F}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\cdot F^{\mu\nu}。\quad(2.255)$$

(2.255)式与电磁拉格朗日量之间的差别在于“·”表示李代数 g 的不变内积，并且 $F_{\mu\nu}$ 的定义为

$$F_{\mu\nu}=\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu}+[A_{\mu},A_{\nu}]。\quad(2.256)$$

(2.256)式的分量形式为

$$F_{\mu\nu}^{a}=\partial_{\mu}A_{\nu}^{a}(x)-\partial_{\nu}A_{\mu}^{a}(x)+f_{bc}^{a}A_{\mu}^{b}(x)A_{\nu}^{c}(x)。\quad(2.257)$$

总的拉格朗日函数为

$$L=L_{M}(\psi,D_{\mu}\psi)+L_{F}。\quad(2.258)$$

当 G 是非阿贝尔群时，在 $L_{M}\equiv 0$ 的情形仍然有非平庸的结果，L_{F} 中将含有 $(A_{\mu})^{3}$ 和 $(A_{\mu})^{4}$ 的自耦合项。

4. SU(2)杨-米尔斯理论

SU(2)变换下的整体不变性要求物质场的拉格朗日函数

$$L_M = \frac{i}{2}(\bar{\psi}_a\gamma_\mu\partial^\mu\psi^a - \partial^\mu\bar{\psi}_a\gamma_\mu\psi^a) - M\bar{\psi}_a\psi^a, \quad (2.259)$$

其中 $\psi^a(a=1, 2)$ 是 SU(2)同位旋量二重态的分量，$\psi=(\psi^1, \psi^2)$，其中 ψ^1 和 ψ^2 可以分别用来描写中子和质子，它们自身是狄拉克旋量，γ^μ 是狄拉克矩阵。在 SU(2)变换下，ψ 的变换为

$$\begin{aligned}\psi^a \to \psi'^a &= \exp\left[\left(-\frac{i}{2}\right)\varepsilon_k\tau_k\right]^a_b\psi^b,\\ \bar{\psi}_a \to \bar{\psi}'_a &= \bar{\psi}_b\exp\left[\left(-\frac{i}{2}\right)\varepsilon_k\tau_k\right]^b_a,\end{aligned} \quad (2.260)$$

其中 ε_k 是三个常参数，矩阵$(-i/2)\tau_k$ 是 SU(2)的无穷小生成元，在 2×2 表示中，τ_k 是泡利矩阵

$$\tau_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix},\ \tau_2 = \begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix},\ \tau_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}。 \quad (2.261)$$

无穷小变换规则为

$$\begin{aligned}\delta\psi^a &= -\frac{i}{2}\varepsilon_k(\tau_k)^a_b\psi^b,\\ \delta\psi_a &= \frac{i}{2}\varepsilon_k\bar{\psi}_b(\tau_k)^b_a,\end{aligned} \quad (2.262)$$

所以变换的生成元表示为

$$(T_k)^a_b = -\frac{i}{2}(\tau_k)^a_b。 \quad (2.263)$$

生成元的变换关系为

$$[T_k, T_l] = -\frac{1}{4}[\tau_k, \tau_l] = \varepsilon_{klm}T_m。 \quad (2.264)$$

其中 ε_{klm} 为完全反对称张量，$\varepsilon_{123}=1$。

在局部 SU(2)规范不变的要求下，应当用 $D_\mu\psi^a$ 来替代$\partial_\mu\psi^a$，

$$D_\mu\psi^a \equiv \partial_\mu\psi^a + \frac{i}{2}(\tau_k)^a_b A^k_\mu\psi^b。 \quad (2.265)$$

其中矢量常三重态 A_μ^k 是规范场。规范场的拉格朗日函数为

$$L_F = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a \cdot F^{a\mu\nu}。 \tag{2.266}$$

其中

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - \varepsilon_{abc}A_\mu^b A_\nu^c。 \tag{2.267}$$

A_μ^a 的变换规则为

$$\delta A_\mu^a(x) = \varepsilon_{abc}A_\mu^b(x)\varepsilon^c(x) + \partial_\mu \varepsilon^a(x), \tag{2.268}$$

总的拉格朗日函数为

$$\begin{aligned} L &= L_F + \mathrm{i}\,\bar{\psi}_a\gamma_\mu D^\mu \psi^a - M\bar{\psi}\psi \\ &= L_F + \frac{\mathrm{i}}{2}(\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi - \partial^\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi) - M\bar{\psi}\psi - \frac{\mathrm{i}}{\partial}g\,\bar{\psi}_a\gamma^\mu T_{ab}^a A_\mu^k\psi^b。 \end{aligned} \tag{2.269}$$

§ 2.5 对称性自发破缺

1. 戈德斯通(Goldstone)玻色子

可重整化的有质量的自耦合中性标量场的拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda\phi^4。 \tag{2.270}$$

拉格朗日函数(2.270)具有 Z_2 对称性。在 $\phi \to -\phi$ 变换下不变。势函数

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 \tag{2.271}$$

在 $\mu^2 > 0$ 的情形,$V(\phi)$仅有一个极小值,即 $\phi = 0$。这对应稳定的、非退化的、唯一的基态 $\phi = 0$。在 $\mu^2 < 0$ 的情形,$V(\phi)$的极小值是退化的

$$\phi = \pm\phi_0,\ \phi_0 = \left(-\frac{\mu^2}{\lambda}\right)^{1/2}。 \tag{2.272}$$

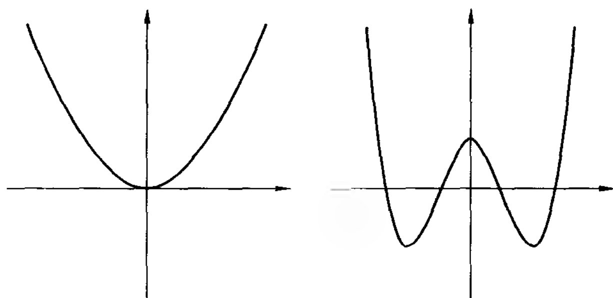


图 2.2 在 $\mu^2>0$ 或 $\mu^2<0$ 情况下标量场的势函数。这两种情形有着完全不同的形状。

可以选择其中一个值作为基态，而不能同时选择两者作为基态。必须强调，不同的真空基态对应于不同的物理世界解释，选择某一基态就破坏了 Z_2 对称性。

如果选择 ϕ_0 作为基态，下面考虑 ϕ_0 附近解的性质。作平移 $\tilde{\phi}=\phi-\phi_0$，$\tilde{\phi}$ 作为物理相关的新变量，$\tilde{\phi}=0$ 是新的稳定的极小值。在新变量 $\tilde{\phi}$ 下，拉格朗日量(2.270)改写成

$$L=\frac{1}{2}\partial_\mu\tilde{\phi}\partial^\mu\tilde{\phi}+\mu^2\tilde{\phi}^2-\lambda\phi_0\tilde{\phi}^3-\frac{1}{4}\lambda\tilde{\phi}^4, \quad (2.273)$$

其中质量项表明 $\tilde{\phi}$ 场具有质量 $-2\mu^2$，拉格朗日量(2.273)不再具有 $\phi\to-\phi$ 的对称性，但 Z_2 对称性并非失去，而是被隐藏起来了。

一般而言，整体对称性是一个连续变换群。如果这样的整体对称性是自发破缺的，零自旋和零质量粒子就会产生，它们被称作为戈德斯通玻色子。这些无质量玻色子并没有被粒子物理实验所发现，但是在固体物理中，戈德斯通玻色子是一个人所熟知的现象。上述结论在局部对称性时，就会得到彻底改变。如果局部规范群的对称性是自发破缺，则部分戈德斯通玻色子将会得到质量，这就是所谓的希格斯现象。

2. U(1)规范场

为了简单起见，考虑复标量场的例子，拉格朗日函数为

$$L = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi), \tag{2.274}$$

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2(\phi^*\phi) + \frac{1}{4}\lambda(\phi^*\phi)^2, \tag{2.275}$$

拉格朗日函数在整体 U(1)变换 $\phi \to e^{-i\varepsilon}\phi$ 下是不变的。如果要求上述拉格朗日函数在局部 U(1)群变换

$$\phi \to e^{-i\varepsilon(x)}\phi \tag{2.276}$$

下不变，就不得不引入规范场 $A_\mu(x)$，并用 $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ 替代∂_μ。在 U(1)规范变换下，规范场 $A_\mu(x)$的变换为

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\varepsilon(x), \tag{2.277}$$

不变的拉格朗日函数为

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi^*(\partial^\mu + ieA^\mu)\phi - V(\phi), \tag{2.278}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu。 \tag{2.279}$$

在 $\mu^2 > 0$ 的情形，上述理论描述了光子和有质量标量粒子的标量电动力学；在 $\mu^2 < 0$ 的情形，U(1)对称性自发破缺就会发生。$V(\phi)$ 的极小值位于圆周 $|\phi| = \phi_0$，$\phi_0 = (-\mu^2/\lambda)^{1/2}$ 上。选择其中一个极小值，$\phi = \phi_0$ 作为真空，并定义物理场 $\tilde{\phi} = \phi - \phi_0$。为了得到一个粒子的解释，选取特殊规范 $\tilde{\phi} = \rho$，其中 ρ 是一个实标量场。于是，拉格朗日函数约化成

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\rho\partial^\mu\rho + \frac{1}{2}e^2\phi_0^2A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}e^2A_\mu A^\mu\rho(2\phi_0 + \rho)$$
$$- \frac{1}{2}\rho^2(3\lambda^2\phi_0^2 + \mu^2) - \lambda\phi_0\rho^3 - \frac{1}{4}\lambda\rho^4。 \tag{2.280}$$

在上述规范中，实标量场 ρ 的质量为 $(3\lambda^2\phi_0^2 + \mu^2)^{1/2}$，矢量玻色子 A_μ 的质量为$|e|\phi_0$。原来复标量场 ϕ 的两个自由度平移后转

化为$\tilde{\phi}_1$，$\tilde{\phi}_2$，而它们中的一个在选择特殊规范后被转移了。特殊规范为A_μ提供了一个附加分量，系统$\tilde{\phi}_1$(一个自由度)、$\tilde{\phi}_2$(一个自由度)和A_μ(无质量矢量粒子，二个自由度)共有四个自由度。在幺正规范中被转化成了ρ(一个自由度)和A_μ(有质量矢量粒子，三个自由度)。用形象的语言说，无质量粒子A_μ吞噬了戈德斯通玻色子变成了有质量的粒子。用严格的术语说，非物理的戈德斯通玻色子已被转换成具有纵向极化的矢量玻色子的物理态。这一重要的规范场性质被称为希格斯机制，由$\tilde{\phi}_1$或ρ所描写的标量粒子称为希格斯玻色子。

3. 希格斯机制

设规范群$G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$，对应的李代数为$\mathscr{g}$。对于子群$G_i$的规范耦合常数为$g_i$。为了方便起见，可以通过用$g_i A_\mu^i$替代$A_\mu^i$将耦合常数$g_i$吸收到规范场$A_\mu^i$中。拉格朗日函数为

$$L = -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \phi,\ D^\mu \phi) - V(\phi), \qquad (2.281)$$

其中

$$D_\mu \phi \equiv (\partial_\mu - \mathrm{i} A_\mu^a T_a) \phi,\ T_a \in \mathscr{g}。\qquad (2.282)$$

再假定势$V(\phi)$是G不变的，v是$V(\phi)$的极小值，

$$DV(v) = 0,\ D^2 V(v) > 0。\qquad (2.283)$$

在子群$H \subset G$作用下，有$Hv = v$。子群H对应的李代数为$\mathscr{H}$。如果不存在规范场A_μ，则期待有($\dim \mathscr{g}$-$\dim \mathscr{H}$)个无质量戈德斯通玻色子出现。在规范理论中，以$\tilde{\phi} = \phi - v$代入后的拉格朗日量形式为

$$L = -\frac{1}{4g^2} F^2 + \frac{1}{2} (D_\mu \tilde{\phi},\ D^\mu \tilde{\phi}) + (D_\mu \tilde{\phi},\ D^\mu v)$$

$$+ \frac{1}{2} (D_\mu v,\ D^\mu v) - V(\tilde{\phi} + v)。\qquad (2.284)$$

将势 $V(\tilde{\phi}+v)$ 围绕 v 展开，有

$$L=-\frac{1}{4g^2}F^2+\frac{1}{2}(D_\mu\tilde{\phi},\ D^\mu\tilde{\phi})+(D_\mu\tilde{\phi},\ T_a v)A^{a\mu}$$
$$-\frac{1}{2}(T_a v,\ T_b v)A^a_\mu A^{b\mu}-V(v)-\frac{1}{2}D^2V(v)(\tilde{\phi},\ \tilde{\phi})+\cdots \tag{2.285}$$

为了避免出现非对角项，应当选取特殊规范

$$(\tilde{\phi},U_*(X)v)=0,\ X\in\mathscr{g}。\tag{2.286}$$

由于戈德斯通粒子精确地对应 $\tilde{\phi}$ 在子空间 $U_*(X)v,\ X\in\mathscr{g}$ 中的分量，在特殊规范中不存在这些粒子。规范场的质量项含在矩阵 $M_{ab}=(T_a v,\ T_b v)$ 之中。在对角化这些矩阵后，可得规范玻色子的质量。由于矩阵的秩等于由 $T_a v$ 展开的矢量空间，即($\dim\mathscr{g}$-$\dim\mathscr{H}$)。因此，人们可以得到如下结论，$\dim\mathscr{H}$ 个规范玻色子仍然是无质量的，而($\dim\mathscr{g}$-$\dim\mathscr{H}$)个规范玻色子变成有质量的，这是希格斯现象的一般结论。

§2.6 SU(5)大统一

1. SU(5)群结构

SU(5)群由 5×5 幺模幺正矩阵所组成，含有 24 个参数。当 SU(5)群作为局部规范群时，理论将含有 24 个规范玻色子，其中 12 个必须是描述在 SU(3)×SU(2)×U(1) 标准模型的中间玻色子 $W^\pm_\mu$，Z^0_μ，光子 A_μ 和胶子 A^a_μ。余下的 12 个规范粒子是新的，称其为 X，Y 玻色子。

由于规范相互作用保持费米子的螺旋度(手征性)，所以用有确定螺旋度的费米子来填充群的不可约表示是方便的。我们利用左手场 f_L 和它的荷共轭 f^c_L(描述具有相对荷的同一粒子)。SU(5)不可约表示在子群 SU(3) × SU(2) × U(1) 下的分解用记号 (SU(3)，SU(2))$_Y$ 来表示，其中 Y 是超荷。超荷与电荷的关系为

$$Q = \frac{\sigma_3}{2} + Y, \tag{2.287}$$

其中 σ_3 是泡利矩阵。在 SU(5)的五维表示中，SU(3) × SU(2) × U(1) 的嵌入为

$$\mathrm{SU}(3) \times \mathrm{SU}(2) \to \begin{pmatrix} \mathrm{SU}(3) & 0 \\ 0 & \mathrm{SU}(2) \end{pmatrix}。 \tag{2.288}$$

子群 U(1)的生成元为

$$Y = \mathrm{diag}\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 1, 1\right)。 \tag{2.289}$$

即有

$$\mathbf{5} : (\mathbf{3}, \mathbf{1})_{2/3} \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2})_1, \tag{2.290}$$

共轭表示

$$\mathbf{5}^* : (\mathbf{3}^*, \mathbf{1})_{-2/3} \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-1}。 \tag{2.291}$$

利用基本表示张量积的不可约表示分解，可得

$$\mathbf{5} \otimes \mathbf{5} = \mathbf{15} \oplus \mathbf{10}, \tag{2.292}$$

$$\mathbf{5} \otimes \mathbf{5}^* = \mathbf{24} \oplus \mathbf{1}, \tag{2.293}$$

其中 **24** 是实表示，即 $\mathbf{24} = \mathbf{24}^*$。SU(2) 的二维表示也是实的，$\mathbf{2} = \mathbf{2}^*$。

2. 费米子

在标准模型中，每一代费米子有 15 个基本态：u_L 和 u_L^c 描写上夸克，d_L 和 d_L^c 描写下夸克，e_L 和 e_L^c 描写电子以及 ν_L 描写中微子。这 15 个态描述了第一代费米子。在 SU(3) × SU(2) × U(1) 标准规范模型中，它们填充不可约表示如下：

$$u_L, d_L : (\mathbf{3}, \mathbf{2})_{1/3}, \; d_L^c : (\mathbf{3}^*, \mathbf{1})_{2/3}, \; u_L^c : (\mathbf{3}^*, \mathbf{1})_{-4/3},$$

$$\nu_L, e_L : (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-1}, \; e_L^c : (\mathbf{1}, \mathbf{1})_2。 \tag{2.294}$$

因为 SU(5)的不可约表示 **10** 和 **15** 在子群 SU(3) × SU(2) × U(1) 下的约化为

$$\begin{aligned} \mathbf{10}:&\ (\mathbf{3},\ \mathbf{2})_{1/3} \oplus (\mathbf{3},\ \mathbf{1})_{4/3} \oplus (\mathbf{1},\ \mathbf{1})_2, \\ \mathbf{15}:&\ (\mathbf{6},\ \mathbf{1})_{-4/3} \oplus (\mathbf{3},\ \mathbf{2})_{1/3} \oplus (\mathbf{1},\ \mathbf{3})_2, \end{aligned} \tag{2.295}$$

所以 **15** 维表示并不能填充基本态，而应选择 $\mathbf{5} \oplus \mathbf{10}$ 维表示，

$$\begin{aligned} \mathbf{5}^*:&\ v_L,\ e_L,\ d_L^c, \\ \mathbf{10}:&\ e_L^c,\ u_L,\ d_L,\ u_L^c。 \end{aligned} \tag{2.296}$$

具体填充如下：

$$\psi_L = \begin{pmatrix} d_1^c \\ d_2^c \\ d_3^c \\ e^- \\ -\nu_e \end{pmatrix}, \tag{2.297}$$

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & u_3^c & -u_2^c & -u_1 & -d_1 \\ -u_3^c & 0 & u_1^c & -u_2 & -d_2 \\ u_2 & u_1^c & 0 & -u_3 & -d_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 & -e^c \\ d_1 & d_2 & d_3 & e^c & 0 \end{pmatrix}。 \tag{2.298}$$

在(2.297)式和(2.298)式中，15 个基本态不包含 ν_L^c，即等价地不包含右手中微子 ν_R，所以中微子是无质量粒子。SU(5)多重态由夸克和轻子组成，所以 SU(5)变换将混合夸克和轻子态，对于夸克和轻子而言，SU(5)规范不变相互作用是相同的。

由于 SU(2) × U(1) 是 SU(5)的子群，所以电荷算子属于 SU(5) 的生成元。单纯李群的任何生成元是无迹的，因为对于 $\mathscr{A} \in g$，一定存在 $\mathscr{B}$, $\mathscr{C} \in g$，使得 $\mathscr{A} = [\mathscr{B}, \mathscr{C}]$，所以 $\mathrm{tr}\,\mathscr{A} = \mathrm{tr}\mathscr{B}\mathscr{C} - \mathrm{tr}\mathscr{C}\mathscr{B} = 0$。由此可知，$\mathrm{tr}Q = 0$。即在一个多重态中，粒子电荷之

和必须为零。例如,对于 SU(5)的五重态 ψ_L,我们有

$$\mathrm{tr}Q = q_{d_1^c} + q_{d_2^c} + q_{d_3^c} + q_{e^-} + q_\nu = 0。 \tag{2.299}$$

从上式即可导出

$$q_{d^c} = \frac{1}{3}e, \tag{2.300}$$

其中 1/3 这个因子可以解释为存在三种不同颜色的夸克。在 SU(5)基本表示中,电荷算子 Q 为

$$Q = \mathrm{diag}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 0\right)。 \tag{2.301}$$

3. 规范场

规范玻色子对应于李代数的生成元。SU(5)有 24 个独立的生成元,24 维伴随表示在 SU(3) × SU(2) × U(1) 子群分解为

$$\mathbf{24}: (\mathbf{8}, \mathbf{1})_0 \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3})_0 \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1})_0 \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2})_{-5/3} \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{2})_{5/3}。 \tag{2.302}$$

可以作如下的填充:
$(\mathbf{8}, \mathbf{1})_0$ 是 $\mathrm{SU}(3)_c$ 的胶子场,
$(\mathbf{1}, \mathbf{3})_0$ 是 $W^\pm$, W_3, $\mathrm{SU}(2)_L$ 规范玻色子,
$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_0$ 是 B 场(在弱电统一模型中,B 和 W_3 的混合产生 γ 和 Z),
$(\mathbf{3}, \mathbf{2})_{-5/3}$是 $X(-4/3)$, $Y(-1/3)$ 玻色子,
$(\mathbf{3}^*, \mathbf{2})_{5/3}$是 $X^c(4/3)$, $Y^c(1/3)$ 玻色子。
SU(5)规范场可由下述分量场组成

$$V_\mu \equiv \sum_{a=1}^{24} V_\mu^a T_a, \tag{2.303}$$

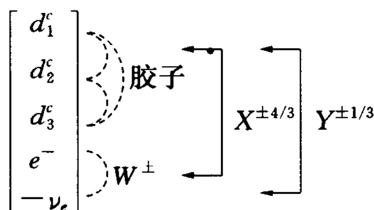
其中 T_a 归一化为 $\mathrm{tr}T_aT_b = \delta_{ab}$。协变导数

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - \mathrm{i}\frac{g_5}{\sqrt{2}}V_\mu, \tag{2.304}$$

其中 g_5 是 SU(5)普适耦合常数，因子 $1/\sqrt{2}$是为了归一化方便而引入的。规范场强为

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu - \mathrm{i}\,\frac{g_5}{\sqrt{2}}[V_\mu, V_\nu]。 \tag{2.305}$$

胶子、弱电玻色子和 X，Y 玻色子与费米子相互作用示意如下。



4. 希格斯玻色子

选择希格斯玻色子是 24 维伴随表示：

$$\Phi = \sum_{a=1}^{24} \varphi^a T_a, \tag{2.306}$$

其中 T_a 是 SU(5)李代数的基。希格斯势取为

$$V(\Phi) = -\frac{1}{2}\mu^2 \mathrm{tr}\Phi^2 + \frac{1}{4}a(\mathrm{tr}\Phi^2)^2 + \frac{1}{2}b\mathrm{tr}\Phi^4, \tag{2.307}$$

势的极小值位于

$$\langle\Phi\rangle \equiv v_{24}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}。 \tag{2.308}$$

v_{24}与 a，b，μ^2 之间的关系为

$$(15a + 7b)v_{24}^2 = 2\mu^2。 \tag{2.309}$$

保持$\langle\Phi\rangle$不变的群是标准模型规范群 SU(3)×SU(2)×U(1)。12

个 X，Y 玻色子将变成有质量的，它们的纵向自由度使用了 Φ 中的 12 个希格斯分量场。余下的 12 个希格斯标量对应于保持 $\langle\Phi\rangle$ 不变的 SU(5)生成元。希格斯场的 24 重态不能用来产生费米子质量，费米子质量是通过希格斯多重态与费米子表示的乘积的耦合得到的。由于一代费米子为

$$\mathbf{5}^* \oplus \mathbf{10}, \tag{2.310}$$

利用分解

$$(\mathbf{5}^* \oplus \mathbf{10}) \otimes (\mathbf{5}^* \oplus \mathbf{10}) = \mathbf{10}^* \oplus \mathbf{15}^* \oplus \mathbf{5} \oplus \mathbf{45}^* \oplus \mathbf{5}^* \oplus \mathbf{45} \oplus \mathbf{50}, \tag{2.311}$$

其中不含 **24** 伴随表示，但含有 $\mathbf{5}^*$ 和 **45**，所以人们可以通过 5 重态希格斯场 H 产生费米子质量。事实上，自发对称破缺是通过两步走的，

$$\begin{aligned} \mathrm{SU}(5) &\xrightarrow[\Phi]{} \mathrm{SU}_c(3) \times \mathrm{SU}_L(2) \times \mathrm{U}_Y(1) \\ &\xrightarrow[H]{} \mathrm{SU}_c(3) \times \mathrm{U}_{em}(1)。 \end{aligned} \tag{2.312}$$

希格斯场的有效势的最小值为

$$H_0 = \frac{v_5}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}。 \tag{2.313}$$

具有 29 个希格斯场的 SU(5)模型称为最小模型，尚有许多种可能的选择。

§2.7 SO(10)大统一

1. SU(2)的对称破缺

在讨论 SO(10)群对称破缺之前，先详细分析 SU(2)对称破

缺,SU(2)的群元能写成如下形式：

$$U = \exp(\mathrm{i}\theta \boldsymbol{n}_a \tau_a) = \cos\frac{\theta}{2} + 2\mathrm{i}\boldsymbol{n}_a \tau_a \sin\frac{\theta}{2} \qquad (2.314)$$

其中 τ_a 正比于泡利矩阵，$\tau_a = \sigma_a/2$，而 $\boldsymbol{n}_a$ 是三维空间单位矢量。SU(2)的群流形是单连通的 S^3，而 SO(3)的群流形是对径点恒等的 S^3，所以后者是双连通的。SU(2)群是 SO(3)群的单连通覆盖群。SU(2)群的基本表示是二维表示，矢量表示是三维表示，张量表示 $\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}$ 可以分解成如下的直和

$$\mathbf{3}\otimes\mathbf{3} = \mathbf{1}\oplus\mathbf{3}\oplus\mathbf{5}, \qquad (2.315)$$

其中一维表示对应于张量的迹，三维表示对应于张量的反对称部分的三个独立分量，五维表示对应于无迹对称部分的五个独立分量。

下面讨论 SU(2)对称性的两种破缺方案。第一种方案是

$$\mathrm{SU}(2) \xrightarrow{\sigma} I, \qquad (2.316)$$

即希格斯场 σ 是 SU(2)的二维表示(旋量)，

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix}, \qquad (2.317)$$

其中 σ_1 和 σ_2 是复的。希格斯势

$$V(\sigma) = \frac{1}{4}\lambda(\sigma^+\sigma - \eta^2)^2, \qquad (2.318)$$

当 $\sigma^+\sigma = \eta^2$ 时，$V(\sigma) = 0$。取 $\sigma_0^+ = (0, \eta)$，容易发现未破缺子群 H 是平庸的(由于不存在生成元，使 $T_a\sigma_0 = 0$)。所以，真空流形恒等于 SU(2)群流形。事实上，将 σ 改写成四个实场，则在四维欧几里得空间中同构于 S^3，

$$G/H = \mathrm{SU}(2) \cong S^3。 \qquad (2.319)$$

第二种方案是

$$\mathrm{SU}(2) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{U}(1) \xrightarrow{\psi} Z_2, \tag{2.320}$$

其中希格斯场是在伴随表示中的 φ 场和 ψ 场，它们都是实三重态。

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}, \quad L^a = \begin{bmatrix} T^a & 0 \\ 0 & T^a \end{bmatrix}。 \tag{2.321}$$

希格斯势为

$$V(\varphi, \psi) = \frac{1}{4}\lambda_\varphi(\varphi^2 - \eta_\varphi^2)^2 + \frac{1}{4}\lambda_\psi(\psi^2 - \eta_\psi^2)^2 + \frac{1}{8}g(\varphi \cdot \psi)^2。 \tag{2.322}$$

先考虑 $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{U}(1)$，选取

$$\langle\varphi\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \eta_\varphi \end{bmatrix}, \tag{2.323}$$

通过直接验算，关于群空间的 z 轴旋转算子

$$T_3 = v\begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.324}$$

将湮灭 $\langle\varphi\rangle$，即 $T_3\langle\varphi\rangle = 0$。由 $R = \exp(-\mathrm{i}\theta T_3)$ 给出旋转子群 SO(2)，它保持 $\langle\varphi\rangle$ 不变，这蕴涵着 SU(2)的子群 U(1)是未破缺的子群。真空的流形为

$$G/H = \mathrm{SU}(2)/\mathrm{U}(1) \cong S^2。 \tag{2.325}$$

下面考虑破缺 $\mathrm{U}(1) \to Z_2$，由于 $\langle\varphi\rangle$ 位于 z 方向，而(2.322)式中的最后一项表明，$\langle\psi\rangle$ 必须指向与 $\langle\varphi\rangle$ 正交的方向，例如可取

$$\langle\psi\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_\psi \\ 0 \end{bmatrix}。 \tag{2.326}$$

容易看出$\langle\Phi\rangle$不为任一生成元L_a所湮灭。然而,未破缺子群并不是平庸的,对于SO(3)群而言,只有恒等元I保持$\langle\varphi\rangle$和$\langle\psi\rangle$不变,对于SU(2)群而言,有两个群元I和$-I$保持$\langle\varphi\rangle$和$\langle\psi\rangle$不变。于是$H = Z_2$。

2. Spin(10)群

SO(10)的单连通覆盖群是Spin(10)。Spin(10)与SO(10)的关系类似于SU(2)和SO(3)的关系。Spin(10)的生成元能定义为

$$\sigma_{jk} = \frac{1}{2i}[\Gamma_j, \Gamma_k],\ j, k = 1, 2, \cdots, 10, \tag{2.327}$$

其中Γ_j是10维狄拉克矩阵,这是由泡利矩阵σ_k的直积构成的32×32矩阵:

$$\begin{aligned}
&\Gamma_1 = \sigma_1\times\sigma_1\times 1\times 1\times\sigma_2,\ \Gamma_2 = \sigma_1\times\sigma_2\times 1\times\sigma_3\times\sigma_2,\\
&\Gamma_3 = \sigma_1\times\sigma_1\times 1\times\sigma_2\times\sigma_3,\ \Gamma_4 = \sigma_1\times\sigma_2\times 1\times\sigma_2\times 1,\\
&\Gamma_5 = \sigma_1\times\sigma_1\times 1\times\sigma_2\times\sigma_1,\ \Gamma_6 = \sigma_1\times\sigma_2\times 1\times\sigma_1\times\sigma_2,\\
&\Gamma_7 = \sigma_1\times\sigma_3\times\sigma_1\times 1\times 1,\ \Gamma_8 = \sigma_1\times\sigma_3\times\sigma_2\times 1\times 1,\\
&\Gamma_9 = \sigma_1\times\sigma_3\times\sigma_3\times 1\times 1,\ \Gamma_{10} = \sigma_2\times 1\times 1\times 1\times 1,
\end{aligned} \tag{2.328}$$

每一代的左手费米子属于16维旋量表示,例如,第一代费米子为

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}_L = (&u_1, u_2, u_3, \nu_e, d_1, d_2, d_3, e^-, d_1^c, d_2^c, d_3^c, e^+,\\
&-u_1^c, -u_2^c, -u_3^c, -\nu_e^c)_L,
\end{aligned} \tag{2.329}$$

在子群分解$SU(5)\times U(1)_p \subset Spin(10)$下,有

$$\mathbf{16}:\mathbf{1}_5 + \mathbf{10}_1 + \mathbf{5}_{-3}, \tag{2.330}$$

其中下标是下述算子的本征值

$$P = \sigma_{12} + \sigma_{34} + \sigma_{56} + \sigma_{78} + \sigma_{9\,10}. \tag{2.331}$$

(2.330)式表明，在子群 SU(5)下除了通常的粒子外，还有一个SU(5)中性单态粒子。这个单态粒子是具有大质量的右手中微子。电荷算子

$$Q=\frac{1}{3}(\sigma_{12}+\sigma_{34}+\sigma_{56})-\sigma_{9\,10}。\tag{2.332}$$

3. 对称性自发破缺

为了选取希格斯场的表示，考虑如下表示张量积的分解：

$$\begin{aligned}(\mathbf{16}\otimes\mathbf{16})_S &= \mathbf{10}\oplus\mathbf{126},\\ \mathbf{16}\otimes\mathbf{16}^* &= \mathbf{1}\oplus\mathbf{45}\oplus\mathbf{210},\end{aligned}\tag{2.333}$$

其中下标 S 是指对称张量积部分。在 $SU(5)\times U(1)_p$ 下的分解为

$$\begin{aligned}&\mathbf{126}:\mathbf{1}_{10}\oplus\mathbf{10}_6\oplus\mathbf{50}_2\oplus\mathbf{5}_2^*\oplus\mathbf{45}_{-2}^*\oplus\mathbf{15}_{-6}^*,\\ &\mathbf{45}:\mathbf{10}_4^*\oplus\mathbf{24}_0\oplus\mathbf{1}_0\oplus\mathbf{10}_{-4},\\ &\mathbf{10}:\mathbf{5}_2^*\oplus\mathbf{5}_{-2}。\end{aligned}\tag{2.334}$$

对称性自发破缺链为

$$\begin{aligned}\mathrm{Spin}(10)&\xrightarrow{126}SU(5)\times Z_2\\ &\xrightarrow{45}SU(3)_c\times SU(2)_L\times U(1)_Y\times Z_2\\ &\xrightarrow{10}SU(3)_c\times U(1)_Q\times Z_2。\end{aligned}\tag{2.335}$$

第一步破缺要求126维希格斯场的真空期望值$\langle\phi_{126}\rangle$的非零分量位于 $\mathbf{1}_{10}$ 方向，唯象限制要求第一步破缺发生在超重质量标度 $10^{16}-10^{17}$ GeV。第二步破缺是通过45维伴随表示实施的，质量标度大约为 10^{14} GeV。最后一步破缺的质量标度是弱电标度，10维希格斯表示要求一个非零的真空期望值。

第 3 章　微 分 几 何

微积分和经典物理有着十分密切的关系。而广义相对论和规范场理论与现代微分几何理论更是互相依赖、互相渗透、互相促进发展。流形是现代数学最重要的概念之一，正如映射是函数的推广一样，流形是点、线、面等几何空间概念的推广。在现代数学中，同伦论和同调论也有着十分广泛的应用。大爆炸宇宙在膨胀过程中将产生各种拓扑缺陷，这些拓扑缺陷的分类与群流形的同伦群密切相关。

§3.1　微分流形

1. 流形的定义

定义　设 M 是满足豪斯多夫可分离公理的拓扑空间（豪斯多夫空间），给定 M 上的开集族 $\{U_i,\ i \in I\}$ 以及各开集 U_i 到 R^n 中的映射 φ_i，如果满足下列条件：

(1) $\{U_i,\ i \in I\}$ 给出 M 的一个开覆盖，即 $M = \bigcup U_i$；

(2) 对于每一个 U_i，其象 $D_i = \varphi_i(U_i)$ 是 R^n 中的开集，而 φ_i 是 U_i 到 D_i 上的一个同胚映射；

(3) 在两个开集的重叠区域，映射 $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ 将 R^n 中的开集 $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ 映射到 R^n 中的开集 $\varphi_j(U_i \cap U_j)$。且 $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ 是属于 C^k 类的映射（具有连续的 k 阶微分），

则称 $(U,\ \varphi)$ 在 M 上定义了一个 C^k 流形构造，把 $n = \dim M$ 称为流形的维数，拓扑空间 M 则称为是一个 n 维 C^k 流形（manifold）。

C^∞ 流形又称为微分流形或光滑流形。C^0 流形称为拓扑流

形。C^{ω}流形称为解析流形。我们把 (U_i, φ_i) 称为图(chart)，把 M 上所有图 (U_i, φ_i) 的集合 $\{(U_i, \varphi_i)\}$ 称为图册(atlas)。称 φ_i 为 U_i 上的局部坐标系，U_i 为 φ_i 的坐标邻域。把 M 上的点 $P \in M$ 在 R^n 中的象

$$\varphi_i(p) = \{x^1(P), x^2(P), \cdots, x^n(P)\} \tag{3.1}$$

称为点 P 在 (U_i, φ_i) 中的坐标。上面的条件(1)表示流形上的点至少在一个坐标邻域之中，条件(2)表示流形在局部上都类似于欧氏空间，(3)表示，如果 M 上的点 $P \in M$ 在重叠区 $U_i \cap U_j$ 的坐标分别是 $\{x^1, x^2, \cdots, x^n\}$ 和 $\{y^1, y^2, \cdots, y^n\}$，则这两组坐标存在关系

$$x^i \to y^i = f^i(x), \ i = 1, 2, \cdots, n, \tag{3.2}$$

其中 f 是一个 k 次可微函数。粗略地讲，拓扑空间加上局部坐标就构成流形。一般来说，一个流形是没有整体坐标的。比如复变函数中的球极投影，只有将北极去掉之后，才能将球面上的点与复平面上的点一一对应。因此对二维球面，必须用两个大半球面才能在球面上建立起坐标。从某种意义上说，可以把流形看成是一些变形的局部欧氏空间通过适当方式拼接而成的。

例 1 直线 R，圆周 S^1，球面 S^2，环面 $T^2 = S^1 \times S^1$，柱面 $H = S^1 \times R^1$ 等都是流形。S^n是 n 维流形。

高维流形可由低维流形的直积得到，如

$$R^n = R^1 \times R^1 \times \cdots \times R^1, \ T^n = S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1。\tag{3.3}$$

平面上自相交的曲线不是流形。因为交点的邻域不能同胚于任何 R^1 的开子集。如

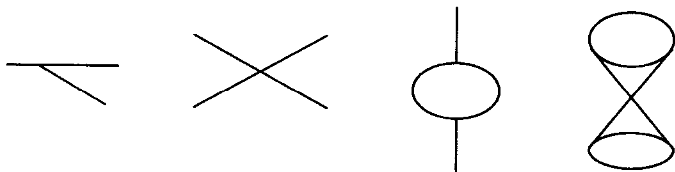


图 3.1

2. 微分同胚

定义 设 M, N 都是 C^∞ 流形，而 f 是 M 到 N 上的 1-1 映射，当 f 和 f^{-1} 都是 C^∞ 映射，则称 f 是一个 C^∞ 微分同胚。此时称流形 M 和 N 是彼此微分同胚的。

同胚映射加上可微的条件就变成微分同胚映射。两个流形如果微分同胚则一定同胚。但两个同胚的流形不一定微分同胚。微分同胚是微分几何的一个重要概念。微分同胚的两个流形维数相同。从某种意义上讲，两个微分同胚的流形可以看成是相同的。从 M 到 N 的所有微分同胚的集合记作 $\mathrm{Diff}(M, N)$。微分同胚还是一种等价关系，可以用来对各种流形进行分类。每一种等价类确定一种微分结构。低维流形 ($d < 3$) 有唯一的微分结构，但高维流形可以有多种微分结构。

3. 切矢量和余切矢量

流形 M 上的一点 $x \in M$ 处的切空间 $T_x(M)$ 可以用来确定流形在 x 点邻域附近的性质。切矢量的定义与局部坐标系无关。物理上的许多近似就相当于用切空间局域地代替流形(类似于用切线代替曲线)，如果 M 是 n 维流形，则 $T_x(M)$ 与 R^n 同构。流形上的切矢量是普通空间的切线和切平面的自然推广。我们先来看函数的切矢量如何定义。将 R^n 中的函数 $f(x)$ 在 $x+a$ 作泰勒展开

$$f(x+a) = f(x) + a^i \frac{\partial}{\partial x^i} f(x) + o(a), \tag{3.4}$$

其中定义了一个作用在函数 $f(x)$ 上的线性微分算子

$$A = a^i \partial x^i。 \tag{3.5}$$

在 R^n 中，点 x 可以看成是一个矢量，在取定坐标系后可以用 n 个实数表示为

$$x = \{x^1, x^2, \cdots, x^n\}, \tag{3.6}$$

其中分量 x^i 与坐标系有关。可以把算符 A 看成是沿位移 a 的方向导数，a^i 可以看成是方向导数的坐标分量，一般情况下 a^i 是 x 的函数，因而是一个矢量场。因此

$$\{\partial/\partial x^i = \partial_i\} \tag{3.7}$$

就定义了切空间的一组基，过 x 点的任何方向导数都可以用这组基来表示。把过 x 点的所有曲线的切矢量张成的空间称为该点的切空间，记为 $T_x(M)$。

对于微分流形 M，可以类似定义在点 $x \in M$ 的切矢量，这是作用在流形上的可微函数上的线性微分算子，且有下列性质：

(1) 线性：

$$V_x(\alpha f + \beta g) = \alpha V_x f + \beta V_x g,\ \alpha, \beta \in R, \tag{3.8}$$

其中 f，g 是 M 上在 x 点的可微函数。

(2) 满足莱布尼茨规则：

$$V_x(fg) = (V_x f)g + f(V_x g)。 \tag{3.9}$$

选定局部坐标系后，在 x 点的切矢量可以表示为

$$V_x = v^i(x)\partial/\partial x^i, \tag{3.10}$$

其中

$$\{\partial/\partial x^1,\ \partial/\partial x^2,\ \cdots,\ \partial/\partial x^n\} \tag{3.11}$$

定义了切空间的一组基，称为自然基。流形 M 上在 x 点的所有切矢量构成一个矢量空间，即切空间 $T_x(M)$。显然 $T_x(M)$ 和流形 M 的维数相同。流形 M 上所有点的切空间的集合

$$\bigcup_{x \in M} T_x(M) = T(M) \tag{3.12}$$

称为流形 M 的切丛(纤维丛)。

切空间 $T_x(M)$ 的对偶空间 $T_x^*(M)$ 也是一个 n 维的矢量空间，称为 x 点的余切空间。余切空间的元素称为余切矢量。如果记 $W_x \in T_x^*(M)$，$V_x \in T_x(M)$，则按对偶的定义，有

$$W_x(V_x) \in R \text{ 或者 } W_x: V_x \to W_x(V_x) \equiv \langle W_x, V_x \rangle \in R,$$

即余切矢量将切矢量映射为实数。也可以说,余切矢量和切矢量的内积是一个实数。显然,余切空间的对偶空间是切空间,切空间和余切空间互为对偶,因此有

$$W_x(V_x) = V_x(W_x)。 \tag{3.13}$$

给定了切空间 $T_x(M)$ 的基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$,可以构造余切空间 $T_x^*(M)$ 的基 $\{\theta^1, \theta^2, \cdots, \theta^n\}$。由内积定义可得

$$W_x(V_x) \equiv \langle W_x, V_x \rangle = \langle w_i\theta^i, v^j e_j \rangle = w_i v^i。 \tag{3.14}$$

因此有

$$\langle \theta^i, e_j \rangle - \delta^i_j。 \tag{3.15}$$

如果取 $T_x(M)$ 的基为自然基

$$\{\partial/\partial x^1, \partial/\partial x^2, \cdots, \partial/\partial x^n\}, \tag{3.16}$$

则可以取 $T_x^*(M)$ 的基为自然基,

$$\{dx^1, dx^2, \cdots, dx^n\}, \tag{3.17}$$

有

$$\langle dx^i, \partial/\partial x_j \rangle = \delta^i_j。 \tag{3.18}$$

余切矢量可以表示为

$$W_x = w_i(x) dx^i。 \tag{3.19}$$

余切矢量又称协变矢量,切矢量又称逆变矢量或简称矢量。利用切空间 $T_x(M)$ 和余切空间 $T_x^*(M)$,可以通过张量积的方式构造高阶的张量空间

$$T^r_s(M) = \underbrace{T_x(M) \otimes T_x(M) \otimes \cdots \otimes T_x(M)}_{r\text{个}} \otimes \underbrace{T_x^*(M) \otimes \cdots \otimes T_x^*(M)}_{s\text{个}}, \tag{3.20}$$

其中有 r 个 $T_x(M)$，s 个 $T_x^*(M)$。其元素为 r 阶逆变，s 阶协变张量。取自然基后，可以将元素表示为

$$W_{(s)}^{(r)}=w_{j_1 j_2\cdots j_s}^{i_1 i_2\cdots i_r}(x)\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes \mathrm{d}x^{j_1}\otimes\cdots\otimes \mathrm{d}x^{j_s}。\tag{3.21}$$

§3.2 微分形式

1. 微分形式

前面引入了通过切空间和余切空间的直积得到的张量空间。利用对称化和反对称化，可以将一般的张量空间分解为一些具有特殊对称类型的不变子空间的直和。其中有一类全反对称的张量显得特别重要。首先定义余切空间基矢量的反对称化张量积：

$$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\frac{1}{2}(\mathrm{d}x\otimes\mathrm{d}y-\mathrm{d}y\otimes\mathrm{d}x)=-\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x,\tag{3.22}$$

称之为外积，或嘉当(E. Cartan)的楔积。外积具有反对称性，所以有

$$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}x=0。\tag{3.23}$$

称微分线元 $\mathrm{d}x$ 为微分 1-形式，$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ 为微分 2-形式。当坐标变换时，有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\rightarrow\mathrm{d}x'\wedge\mathrm{d}y'&=\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y}-\frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\&=\frac{\partial(x',y')}{\partial(x,y)}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,\end{aligned}\tag{3.24}$$

给出了正确的雅可比因子。因此，2-形式是一个有向面积元。以上讨论容易推广到 n 维微分流形 M 上去。记 Λ^p 为所有 p-形式组成的空间，Λ^0 即为函数空间，Λ^1 即为余切矢量空间。余切矢量又称 1-形式。可以将 Λ^p 的元素表示为下列形式。

$\wedge^0$ 0-形式 $\{f(x)\}$ 维数 dim = 1

$\wedge^1$ 1-形式 $\{f_i(x)\mathrm{d}x^i\}$ 维数 dim = n

$\wedge^2$ 2-形式 $\{f_{ij}(x)\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j\}$ 维数 dim = $n(n-1)/2$

… … … ……

$\wedge^r$ r-形式 $\{f_{ij\cdots k}(x)\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^k\}$ 维数 dim = C_n^r

… … … ……

$\wedge^n$ n-形式 $\{f_{12\cdots n}(x)\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n\}$ 维数 dim = 1

$\wedge^p$ 具有如下一些重要性质：

(1) $\wedge^p$ 与 $\wedge^{n-p}$ 的维数相等，都是

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \tag{3.25}$$

(2) n-形式只有一种，即

$$f_{12\cdots n}(x)\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n, \tag{3.26}$$

即函数乘以有向体积元，

(3) 不存在阶数大于 n 的形式，$\wedge^p = 0$，如果 $p > n$，

(4) p-形式的系数函数 $f_{ij\cdots k}(x)$ 对指标的交换全反对称，

(5) 将 p-形式和 q-形式外积，将得到一个 $(p+q)$- 形式（当 $p+q>n$ 时为 0）。

由各阶微分形式的直和构成的线性空间

$$\wedge = \wedge^0 \oplus \wedge^1 \oplus \cdots \oplus \wedge^n。 \tag{3.27}$$

其维数为

$$1+n+\frac{1}{2}n(n-1)+\cdots+n+1 = (1+1)^n = 2^n。 \tag{3.28}$$

这个 2^n 维的线性空间加上外积运算构成嘉当代数，也称外代数。满足

结合律：

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma), \tag{3.29}$$

分配律：

$$(\alpha+\beta)\wedge\gamma=\alpha\wedge\gamma+\beta\wedge\gamma, \tag{3.30}$$

交换律：

$$\alpha_p\wedge\beta_q=(-)^{pq}\beta_q\wedge\alpha_p, \tag{3.31}$$

其中下标表示 p-形式或 q-形式。因此，奇次的形式是反交换的，有一个偶次的形式时可交换。如果两个外积的项中包含相同的形式因子则结果必为 0。

现在引入作用在空间 $\wedge$ 上的微分算子，即外微分算子 d，它的作用是将 p-形式变为 $(p+1)$- 形式：

$$\mathrm{d}:\ \wedge^p\rightarrow\wedge^{p+1}。 \tag{3.32}$$

分别取 $p=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$，有

$$\mathrm{d}(f(x))=\frac{\partial f(x)}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i=f_{,i}(x)\mathrm{d}x^i, \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(f_i(x)\mathrm{d}x^i)&=\frac{\partial f_i(x)}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^i=f_{i,j}(x)\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^i\\&=f_{j,i}(x)\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j,\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(f_{ij}(x)\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j)&=\frac{\partial f_{ij}(x)}{\partial x^k}\mathrm{d}x^k\wedge\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j\\&=f_{ij,k}(x)\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^k,\end{aligned} \tag{3.35}$$

等等，可见外微分算子是普通全微分算子的自然推广。显然，对n-形式

$$f_{12\cdots n}(x)\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n, \tag{3.36}$$

有

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}(f_{12\cdots n}(x)\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n)\\&=f_{12\cdots n,i}(x)\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n=0。\end{aligned} \tag{3.37}$$

因为是 n 维空间，$\mathrm{d}x^i$ 一定是 $\mathrm{d}x^1,\ \cdots,\ \mathrm{d}x^n$ 中的一个，而相同的基外

积为 0。由于偏微分的可交换性，两次外微分作用的结果为 0，如

$$\mathrm{dd}(f(x)) = \mathrm{d}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\right) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^j \partial x^i}\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i = 0。 \tag{3.38}$$

因为

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i \partial x^j}, \tag{3.39}$$

而

$$\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i = -\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j。 \tag{3.40}$$

容易证明一般情况下外微分的两次作用结果为 0。可以把这个结果写成

$$\mathrm{dd}\omega_p = 0 \quad 或 \quad \mathrm{d}^2 = 0。 \tag{3.41}$$

对于 p-形式 α_p，q-形式 β_q，我们有

$$\mathrm{d}(\alpha_p \wedge \beta_q) = \mathrm{d}\alpha_p \wedge \beta_q + (-)^p \alpha_p \wedge \mathrm{d}\beta_q。 \tag{3.42}$$

如果 $\mathrm{d}\omega = 0$，称 ω 为闭形式。若 $\omega = \mathrm{d}\alpha$，则称 ω 为恰当形式。

例 1 在二维空间，可能的形式为

$$\alpha_0 = f(x, y), \ \alpha_1 = u(x, y)\mathrm{d}x + v(x, y)\mathrm{d}y,$$
$$\alpha_2 = \phi(x, y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, \tag{3.43}$$

将外微分算子 d 作用在这些微分形式上，可得

$$\mathrm{d}\alpha_0 = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y = \nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \ \mathrm{dd}\alpha_0 = 0 \rightarrow \nabla \times \nabla f = 0。 \tag{3.44}$$

$$\mathrm{d}\alpha_1 = \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$
$$= \nabla \times \boldsymbol{w} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}, \tag{3.45}$$

其中

$$w = u e_x + v e_y, \tag{3.46}$$

而

$$d\alpha_2 = 0。 \tag{3.47}$$

例 2 在三维空间,可能的形式有

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= f(x^1, x^2, x^3) = f(x), \\
\alpha_1 &= v_1(x)dx^1 + v_2(x)dx^2 + v_3(x)dx^3, \\
\alpha_2 &= w_1(x)dx^2 \wedge dx^3 + w_2(x)dx^3 \wedge dx^1 + w_3(x)dx^1 \wedge dx^2, \\
\alpha_3 &= \phi(x)dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3。
\end{aligned} \tag{3.48}$$

用外微分算子作用后得

$$d\alpha_0 = \frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i = \nabla f \cdot d\boldsymbol{x}, \tag{3.49}$$

$$\begin{aligned}
d\alpha_1 = &\left(\frac{\partial v_2}{\partial x^1} - \frac{\partial v_1}{\partial x^2}\right)dx^1 \wedge dx^2 + \left(\frac{\partial v_3}{\partial x^2} - \frac{\partial v_2}{\partial x^3}\right)dx^2 \wedge dx^3 \\
&+ \left(\frac{\partial v_1}{\partial x^3} - \frac{\partial v_3}{\partial x^1}\right)dx^3 \wedge dx^1 = (\nabla \times \boldsymbol{v}) \cdot d\boldsymbol{s},
\end{aligned} \tag{3.50}$$

$$d\alpha_2 = \frac{\partial w_i(x)}{\partial x^i}dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \nabla \cdot \boldsymbol{w} d\tau, \tag{3.51}$$

$$d\alpha_3 = 0, \tag{3.52}$$

两次外微分给出

$$dd\alpha_0 = 0 \rightarrow \nabla \times \nabla f = 0, \tag{3.53}$$

$$dd\alpha_1 = 0 \rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{v}) = 0。 \tag{3.54}$$

从上例可以看到外微分和普通矢量分析之间的关系。对于 0-形式,d 相当于梯度,对于 1-形式,d 相当于旋度,对于 2-形式,d 相当于散度。而 $d^2 = 0$ 则给出了矢量分析中的两个恒等式。其实利用外微分的运算规则,可以推导出矢量分析中的许多公式。比如,从

$$\mathrm{d}[f(x)A_i(x)\mathrm{d}x^i] = \mathrm{d}f(x) \wedge A_i(x)\mathrm{d}x^i + f(x)\mathrm{d}[A_i(x)\mathrm{d}x^i] \tag{3.55}$$

就得到矢量分析公式

$$\nabla \times (f\boldsymbol{A}) = \nabla f \times \boldsymbol{A} + f \nabla \times \boldsymbol{A}。 \tag{3.56}$$

2. 霍奇星(Hodge Star)算子

前面我们已经看到，Λ^p 与 Λ^{n-p} 的维数相同。因此，这两个空间存在着某种对偶性。引入相应的算符，即霍奇星算子，也称对偶变换，它将 p-形式变为 $(n-p)$-形式：

$$^*(\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p}) = \frac{1}{(n-p)!}\varepsilon^{i_1\cdots i_p}{}_{i_{p+1}\cdots i_n}\mathrm{d}x^{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_n}, \tag{3.57}$$

其中 $\varepsilon_{ij\cdots k}$ 是 n 维空间的全反对称张量(取 $\varepsilon_{12\cdots n} = 1$)。可以证明，算子 $*$ 的两次作用给出

$$^{**}(\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p}) = (-)^{p(n-p)}\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p}, \tag{3.58}$$

因此有

$$^{**}\omega_p = (-)^{p(n-p)}\omega_p。 \tag{3.59}$$

对于例 2，$n = 3$，有

$$^*\alpha_0 = f(x)\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 = f(x)\mathrm{d}\tau, \tag{3.60}$$

$$^*\alpha_1 = v_1\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + v_2\mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1 + v_3\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 = \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}, \tag{3.61}$$

$$^*\alpha_2 = w_1\mathrm{d}x^1 + w_2\mathrm{d}x^2 + w_3\mathrm{d}x^3 = w_i\mathrm{d}x^i = \boldsymbol{w}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{3.62}$$

$$^*\alpha_3 = \phi(x)。 \tag{3.63}$$

一般地，在 n 维空间，对于 0-形式

$$\alpha_0 = f(x^1, \cdots, x^n) = f(x) \tag{3.64}$$

和 n-形式

$$\alpha_n = \phi(x)\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n, \tag{3.65}$$

有

$$^*\alpha_0 = f(x)\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n = f(x)\mathrm{d}\tau, \tag{3.66}$$

$$^*\alpha_n = \phi(x)。 \tag{3.67}$$

对于任意两个 p-形式 $\alpha_p = f_{ij\cdots k}\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^k$，$\beta_p = g_{ij\cdots k}\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^k$，有

$$\alpha_p \wedge {}^*\beta_p = \beta_p \wedge {}^*\alpha_p = p!f_{ij\cdots k}g^{ij\cdots k}\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n。 \tag{3.68}$$

现在引入余微分算子 δ，定义为

$$\delta = (-)^{np+n+1} {}^*\mathrm{d}^*。 \tag{3.69}$$

如果空间维数 n 为奇数，则

$$\delta = (-)^{p*}\mathrm{d}^*, \tag{3.70}$$

如果空间维数 n 为偶数，则

$$\delta = (-)^*\mathrm{d}^*。 \tag{3.71}$$

算子 δ 的作用是将 p-形式变为 $(p-1)$-形式，正好与外微分算子 d 的作用相反。δ 和 d 是一对共轭算子。仍以前面三维空间为例，有

$$\delta\alpha_0 = {}^*\mathrm{d}^*\alpha_0 = {}^*\mathrm{d}(f(x)\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3) = 0, \tag{3.72}$$

$$\begin{aligned}
\delta\alpha_1 &= (-)^*\mathrm{d}^*\alpha_1 \\
&= (-)^*\mathrm{d}(v_1\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + v_2\mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1 + v_3\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2) \\
&= (-)^*\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^i}\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3\right) = -\frac{\partial v_i}{\partial x^i} \\
&= -\nabla \cdot \boldsymbol{v},
\end{aligned} \tag{3.73}$$

$$\delta\alpha_2 = {}^*\mathrm{d}{}^*\alpha_2 = {}^*\mathrm{d}(w_i\mathrm{d}x^i)$$
$$= {}^*[(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{w})_1\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3 + (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{w})_2\mathrm{d}x^3\wedge\mathrm{d}x^1 + (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{w})_3\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2)]$$
$$= (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{w})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{3.74}$$

$$\delta\alpha_3 = (-){}^*\mathrm{d}{}^*\alpha_3 = (-){}^*\mathrm{d}[\phi(x)] = (-){}^*\left[\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\right]$$
$$= -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^1}\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3 + \frac{\partial\phi}{\partial x^2}\mathrm{d}x^3\wedge\mathrm{d}x^1 + \frac{\partial\phi}{\partial x^3}\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\right)$$
$$= -\boldsymbol{\nabla}\phi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}。\tag{3.75}$$

容易证明,和算子 d 一样,我们也有

$$\delta^2\omega_p = 0 \quad 或 \quad \delta^2 = 0。\tag{3.76}$$

现在可以定义拉普拉斯算子 Δ

$$\Delta = (\mathrm{d}+\delta)^2 = \mathrm{d}\delta + \delta\mathrm{d}。\tag{3.77}$$

作用在 p-形式上后,有

$$\Delta\omega_p = \mathrm{d}\delta\omega_p + \delta\mathrm{d}\omega_p。\tag{3.78}$$

因此,算子 Δ 的作用将 p-形式仍变为 p-形式。仍以前面三维空间为例,有

$$\Delta\alpha_0 = (\mathrm{d}\delta+\delta\mathrm{d})\alpha_0 = \delta\mathrm{d}\alpha_0 = \delta\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\right) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^i} = -\boldsymbol{\nabla}^2 f, \tag{3.79}$$

$$\Delta\alpha_1 = (\mathrm{d}\delta+\delta\mathrm{d})\alpha_1 = \mathrm{d}(-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}) + \delta[(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}]$$
$$= -[\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} + [\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v})]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$
$$= -(\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{v})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{3.80}$$

$$\Delta\alpha_2 = \mathrm{d}\delta\alpha_2 + \delta\mathrm{d}\alpha_2 = \mathrm{d}[(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{w})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}] + \delta(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{w}\mathrm{d}\tau)$$

$$= [\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{w}) - \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{w})] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

$$= -(\nabla^2 \boldsymbol{w}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}, \tag{3.81}$$

$$\Delta\alpha_3 = \mathrm{d}\delta\alpha_3 = \mathrm{d}(-\nabla\phi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}) = -[\nabla \cdot (\nabla\phi)]\mathrm{d}\tau = -(\nabla^2\phi)\mathrm{d}\tau。 \tag{3.82}$$

下面介绍两个定理：

霍奇定理 如果 M 是紧致的无边界流形，则任意 p-形式 ω_p 可以唯一分解为如下形式

$$\omega_p = \mathrm{d}\alpha_{p-1} + \delta\beta_{p+1} + \gamma_p, \tag{3.83}$$

其中 γ_p 称为调和 p-形式，满足

$$\Delta\gamma_p = 0。 \tag{3.84}$$

斯托克斯定理 设 M 是一个 p 维流形，其边界为∂M，则对任意的 $(p-1)$-形式，有

$$\int_M \mathrm{d}\omega_{p-1} = \int_{\partial M} \omega_{p-1}。 \tag{3.85}$$

斯托克斯定理把局域微分算子 d 与整体的边界算子∂联系起来。如果边界是由几部分组成的，则上式右边为有向和。分别考虑 $p = 0, 1, 2, 3$，可以得到如下结果。

$p = 1$，M 为线段 $a \leqslant x \leqslant b$，边界$\partial M$ 即为端点 $x = a$，$x = b$，$\omega_0 = f(x)$，可得

$$\int_a^b \mathrm{d}f(x) = f(b) - f(a)。 \tag{3.86}$$

此即牛顿-莱布尼茨公式。对于 $p = 2$，有

$$\int_S \mathrm{d}(\boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}) = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \oint_\Gamma \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{3.87}$$

此即矢量分析中的斯托克斯公式。对于 $p = 3$，取

$$\omega_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}E^k \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j = \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s},\ \mathrm{d}\omega_2 = \nabla\cdot \boldsymbol{E}\mathrm{d}\tau, \tag{3.88}$$

$$\int_V \mathrm{d}\omega_2 = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}\tau = \oiint_S \omega_2 = \oiint_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}, \tag{3.89}$$

此即高斯定理。

3. 麦克斯韦(Maxwell)方程组

现在考虑电动力学中的麦克斯韦方程组：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \rho,\ \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0,\ \nabla\times\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0,\ \nabla\times\boldsymbol{B} - \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \boldsymbol{j}。 \tag{3.90}$$

按照矢量分析，可以按下列方式引入矢势 $\mathbf{A}$ 和标势 ϕ，

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}。 \tag{3.91}$$

当 $\boldsymbol{A}$ 和 ϕ 做如下变换时，$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ 不变：

$$\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} - \nabla f,\ \phi\to\phi' = \phi + \frac{\partial f}{\partial t}。 \tag{3.92}$$

这个变换称为规范变换。因此，电磁理论是一个规范对称的理论。由于规范对称性，可以选择让势满足一定的条件，即规范条件。如洛伦兹规范条件：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0。 \tag{3.93}$$

引入四维形式，

$$x^\mu = (t,\ \boldsymbol{x}),\ A^\mu = (\phi,\ \mathbf{A}),\ j^\mu = (\rho,\ \boldsymbol{j}),$$
$$\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu = (\partial_t,\ \nabla), \tag{3.94}$$

则规范变换可以改写为

$$A^{\mu} \to A'^{\mu} = A^{\mu} + \partial^{\mu} f。 \tag{3.95}$$

规范条件可以写成

$$\partial_{\mu} A^{\mu} = 0。 \tag{3.96}$$

而场强和势的关系可以推广为

$$F^{\mu\nu} = \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}, \tag{3.97}$$

相应地，麦克斯韦方程组可以改写成

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = j^{\nu}, \ \partial_{\mu} F_{\nu\lambda} + \partial_{\nu} F_{\lambda\mu} + \partial_{\lambda} F_{\mu\nu} = 0。 \tag{3.98}$$

可以看到，四维形式比三维形式要简洁许多。下面可以看到，用微分形式来表示会更加简洁。

引入 1-形式：

$$A = A_{\mu}(x) \mathrm{d}x^{\mu}, \ j = j_{\mu}(x) \mathrm{d}x^{\mu}。 \tag{3.99}$$

场强可以表示为

$$\begin{aligned} F = \mathrm{d}A &= \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}} \mathrm{d}x^{\nu} \wedge \mathrm{d}x^{\mu} = \frac{1}{2}(\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}) \mathrm{d}x^{\mu} \wedge \mathrm{d}x^{\nu} \\ &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu}(x) \mathrm{d}x^{\mu} \wedge \mathrm{d}x^{\nu}, \end{aligned} \tag{3.100}$$

这是一个 2-形式。规范变换可以写成

$$A \to A' = A + \mathrm{d}f。 \tag{3.101}$$

规范不变性可以从外微分算子的性质 $\mathrm{d}^2 = 0$ 自然得到

$$F' = \mathrm{d}A' = \mathrm{d}A = F。 \tag{3.102}$$

齐次方程成为恒等式

$$\mathrm{d}F = \mathrm{dd}A = 0。 \tag{3.103}$$

而非齐次方程可以写成

$$\delta F = j。 \tag{3.104}$$

4. 黎曼(Riemann)流形

定义 黎曼流形是一个光滑流形,在其上定义了连续的协变二阶张量场,g 称为度规张量,满足

1) g 是对称的,

$$g_x(X, Y) = g_x(Y, X), \tag{3.105}$$

2) 对所有 $X \in T_x(M)$,仅当 $Y = 0$ 时才有

$$g_x(X, Y) = 0。 \tag{3.106}$$

这样的流形称为具有黎曼结构。如果

$$g_x(X, X) > 0, \ \forall X \in T_x(M), \ X \neq 0, \ x \in M, \tag{3.107}$$

则称该流形为真(proper)黎曼流形或黎曼流形,否则称之为伪黎曼流形或广义黎曼流形。物理上常用的四维闵可夫斯基(Minkowski)空间就是广义黎曼流形。张量 g 实际上在切空间 $T_x(M)$ 上定义了一个内积,使其成为一个内积空间。即

$$g_x : T_x(M) \times T_x(M) \to R, \ x \in M。 \tag{3.108}$$

在 x 点选局部坐标系,取自然基,则有

$$(X, Y) = g_x(X, Y) = g_{ij}(x)\xi^i(x)\eta^j(x), \ X = \xi^i\partial_i, \ Y = \eta^i\partial_i。 \tag{3.109}$$

切矢量 X 的模可以定义为

$$\| X \|^2 = g_{ij}(x)\xi^i\xi^j。 \tag{3.110}$$

还可以定义两个切矢量之间的夹角

$$\cos\theta(X, Y) = \frac{g_x(X, Y)}{\| X \| \cdot \| Y \|}, \ X, Y \in T_x(M)。 \tag{3.111}$$

由此可见,流形 M 的黎曼结构由矩阵 $G(x) = (g_{ij}(x))$ 决定。可

以证明，上述表达式与局部坐标系的选取无关。

设 $\gamma(t)$，$t\in I=[a, b]$ 是黎曼流形 M 上的一条光滑曲线，在 M 上沿曲线 $\gamma(t)$ 的切矢量为

$$X=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{3.112}$$

其模长为

$$\| X \| = \left(g_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\right)^{1/2}。 \tag{3.113}$$

因此，曲线的弧长为积分

$$s(\gamma)=\int_a^b \| X \| \,\mathrm{d}t=\int_a^b\left(g_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\right)^{1/2}\mathrm{d}t。 \tag{3.114}$$

因此，曲线 $\gamma(t)$ 的弧长微分的平方为

$$\mathrm{d}s^2=g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\otimes \mathrm{d}x^j。 \tag{3.115}$$

如果流形上有两点 p，q，则把在 M 上连接 p，q 这两点的所有可能的分段光滑曲线中最短的长度定义为点 p 与 q 之间的距离，并把这条曲线称为短程线或测地线。

例 3 通常的欧氏空间 R^n 是一个最简单的 n 维黎曼流形。对于直角坐标系 $\{x_i\}$，其黎曼结构由

$$g_{ij}=\delta_{ij}\quad (i, j=1, 2, \cdots, n) \tag{3.116}$$

给出，并有

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x_1^2+\mathrm{d}x_2^2+\cdots+\mathrm{d}x_n^2。 \tag{3.117}$$

欧氏空间的任何一个子流形都是黎曼流形，其黎曼结构可由所嵌入的欧氏空间的度量诱导而成。例如二维单位球面 $M=S^2$ 是 R^3 的子流形。在 R^3 中取直角坐标系 $\{x_1, x_2, x_3\}$，则有

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x_1^2+\mathrm{d}x_2^2+\mathrm{d}x_3^2。 \tag{3.118}$$

在 M 上的开集 U 上取局部坐标系 $\{u_1, u_2\}$，其中 $u_1=\theta$，$u_2=\phi$。

根据

$$x_1 = \sin\theta\cos\phi,\ x_2 = \sin\theta\sin\phi,\ x_3 = \cos\theta, \quad (3.119)$$

由此可得

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2, \quad (3.120)$$

即对 $M = S^2$ 来说，

$$g_{11} = 1,\ g_{22} = \sin^2\theta,\ g_{12} = g_{21} = 0。 \quad (3.121)$$

§3.3 同伦与同调

1. 同伦和同伦群

现在来考虑两个空间，其中一个有洞。对于没有洞的空间 X_1，经过 x_1 点的闭合路径都可以通过连续变形收缩到 x_1 点。而对于有洞的空间 X_2，经过 x_2 点的闭合路径则有两类，一类可以通过连续变形收缩到 x_1 点，而另一类则不能通过连续变形收缩为一点。也就是说，第一个空间上存在的闭合路径只有一种等价类，第二个空间上存在的闭合路径有两种等价类，称之为同伦类。设 $I = [0, 1] \in R$ 是单位闭区域，X 为拓扑空间，若有映射

$$\alpha: I \to X, \quad (3.122)$$

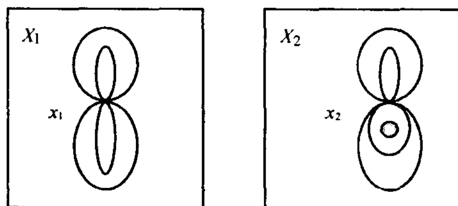


图 3.2

使得

$$\alpha(0) = x_0,\ \alpha(1) = x_1 \quad (x_0,\ x_1 \in X), \quad (3.123)$$

则称 $\alpha(t)$ 为拓扑空间 X 内从 x_0 到 x_1 的一条道路。x_0 称为道路

的起点，x_1 为终点。如果对于在 X 中的任何两个点 x_0，$x_1 \in X$，都有一条包含在 X 内从 x_0 到 x_1 的道路 $\alpha(t)$，则称此拓扑空间 X 为道路连通的。显然，

$$\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t) \tag{3.124}$$

是拓扑空间 X 内从 x_1 到 x_0 的一条道路，称为 $\alpha(t)$ 的逆道路。如果起点终点是同一点，就成为闭合路径或圈(loop)。两个圈的乘法定义为

$$\gamma(t) = \alpha \cdot \beta = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ \beta(2t-1), & 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \tag{3.125}$$

表示先绕 α 路径，再绕 β 路径而构成的闭合路径 γ。两个圈称为是同伦的，如果存在映射 $F(t, s)$，使得

$$F(t, 0) = \alpha(t),\ F(t, 1) = \beta(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{3.126}$$

记为 $\alpha \approx \beta$。同伦是一个等价关系，即有性质

(1) 自反律：$\alpha \approx \alpha$，

(2) 对称律：$\alpha \approx \beta \Rightarrow \beta \approx \alpha$，

(3) 传递律：$\alpha \approx \beta$, $\beta \approx \gamma \Rightarrow \alpha \approx \gamma$。

用 $[\alpha]$ 标记圈 α 的同伦类，而乘法定义为 $[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha \cdot \beta]$，将恒等映射的同伦类视为单位元，则所有以 x_0 为基点的同伦类集合构成群，称为第一同伦群(homotopy group)或基本群，记为 $\pi_1(X, x_0)$。同伦群可以用来描述空间上的洞的情况。

容易证明，对于道路连通的流形，同伦群 $\pi_1(X)$ 仅与流形结构有关，与基点的选择无关。如果 $\pi_1(X)$ 仅含单位元(平凡群)，则称此流形为单连通流形。如 E^n, $S^n(n \geqslant 2)$ 等都是单连通流形。如果同伦群 $\pi_1(X)$ 非平庸，则表示流形存在二维洞，如对环面 T^2 等我们有

$$\pi_1(S^1) = Z,\ \pi_1(T^2) = Z \oplus Z。 \tag{3.127}$$

而对于单连通流形，如 E^n, $S^n(n \geqslant 2)$ 等，我们有

$$\pi_1(S^n) = \{0\}\ (n \geqslant 2),\ \pi_1(E^n) = \{0\}。 \tag{3.128}$$

类似地可以定义高阶同伦群 $\pi_k(X)$,用来描写流形上存在的 $k+1$ 维洞。第一同伦群 $\pi_1(X)$是通过映射

$$S^1 \to X \tag{3.129}$$

来定义的。因此高阶同伦群 $\pi_k(X)$可以通过映射

$$S^k \to X \tag{3.130}$$

来定义,其中还可以包括 $\pi_0(X)$。第 0 同伦群 $\pi_0(X)$可以通过映射

$$S^0 \to X, \tag{3.131}$$

即映射

$$\{+1, -1\} \to X \tag{3.132}$$

来定义。因此,$\pi_0(X)$描写了流形 X 连通分支的个数,对于连通流形,

$$\pi_0(X) = \{0\}。 \tag{3.133}$$

对于 n 维球面 $S^n(n \geqslant 2)$,有

$$\pi_n(S^n) = \pi_2(S^2) = Z,\ \pi_k(S^n) = \{0\},\ 0 < k < n。 \tag{3.134}$$

高阶同伦群的计算非常困难,至今尚未完全解决,但有

$$\pi_3(S^2) = Z,\ \pi_k(S^1) = \{0\}\ (k > 1),\ \pi_k(T^2) = \{0\}\ (k > 1)。 \tag{3.135}$$

2. 单形与三角剖分

为了有一个程序化的方法来计算基本群,引入流形的三角剖分的概念。所谓单形是欧氏空间的一个子集,一个 0 维单形 σ^0 就是一个点 a_0,一个一维单形 σ^1 就是一根有向线段(a_0, a_1),一个二维单形 σ^2 就是平面上的一有向三角形(a_0, a_1, a_2),一个三维 σ^3 单形就是一个有向四面体(a_0, a_1, a_2, a_3)。一般地,有 n 维单形

σ^n,其定义为下列 $(n+1)$ 个独立点$(a_0, a_1, \cdots, a_n)$按一个确定的次序所决定的点集,即集合

$$\sigma^n = \left\{x \mid x = \lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n,\ \lambda_i \geqslant 0,\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1\right\}, \tag{3.136}$$

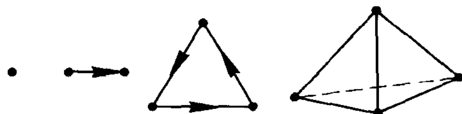


图 3.3

这里 $(n+1)$ 点是独立的,也就是说,n 个矢量

$$(a_1 - a_0), (a_2 - a_0), \cdots, (a_n - a_0)$$

是线性无关的。如果将$(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n)$看成是放置在点$(a_0, a_1, \cdots, a_n)$上的质量,则 x 就是这个质量体系的质心。因此,当所有 $\lambda_i \neq 0$ 时,x 位于单形的内部。而当某个 $\lambda_i = 0$ 时,x 位于相对于顶点 a^i 的一个"面"上。对于单形 σ^n,可以定义它的边界$\partial\sigma^n$,比如对二维单形,

$$\sigma^2 = (a_0, a_1, a_2), \tag{3.137}$$

其边界为

$$\partial\sigma^2 = (a_0, a_1) + (a_1, a_2) + (a_2, a_0)。 \tag{3.138}$$

注意

$$(a_2, a_0) = -(a_0, a_2)。 \tag{3.139}$$

一般地有

$$\partial\sigma^n = \sum_{i=0}^{n} (-)^i (a_0, a_1, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots, a_n)。 \tag{3.140}$$

不难验证,

$$\partial(\partial\sigma^n) = 0, \tag{3.141}$$

即边界的边界恒为零。现在可以定义复形的概念。

定义 R^n 中的有限个单形的集合 K，如果满足以下两个条件，

(1) 若单形 σ 包含于 K，则 σ 的任意面均属于 K，

(2) 若两个单形 σ_1，σ_2 包含于 K，则 $\sigma_1 \cap \sigma_2$ 或是空集，或是 σ_1 和 σ_2 的公共面，

则称 K 为复形。若 L 是复形，且 $L \subset K$，则称 L 为 K 的子复形。如果拓扑空间 X 与 K 同胚，则称 K 是拓扑空间 X 的一个三角剖分。三角剖分不是唯一的。

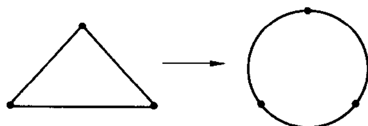


图 3.4

如对于 S^1，其剖分可见图 3.4 所示。可以写成

$$K = \{a_0, a_1, a_2, (a_0, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_0)\}, \quad (3.142)$$

即由三个顶点（0 维单形）和三条棱（1 维单形）组成。如果流形 M 有一个三角剖分，其中 p 维单形的数目为 d_p，则流形 M 的欧拉数定义为交错和

$$\chi(M) = \sum_{p-0} (-)^p d_p。 \quad (3.143)$$

这是一个拓扑不变量，与剖分无关。对于 n 维球面，我们有

$$\chi(S^n) = 1 + (-1)^n。 \quad (3.144)$$

3. 同调群

除了同伦群，流形的另一个重要的拓扑不变量是流形的各阶同调群，$H_k(M)$。两个同胚的流形其同调群同构。先来考虑两个空间 X_1，X_2，其中 X_2 有洞。X_1，X_2 分别与右边的同胚，即 X_1 同胚于二维单形 σ^2，而 X_2 同胚于三个一维单形构成的空间，即 σ^2 的

边界。易见，σ^2 的边界不再是别的任何空间的边界了，边界的边界总是零。这一事实提示了一个描写空间是否含有洞的方法。

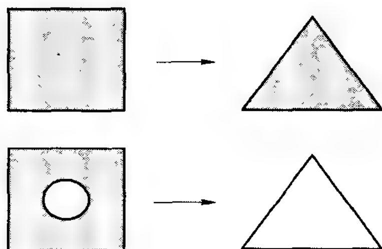


图 3.5

流形 M 中 p 维单形的整系数线性组合称为流形 M 中的 p-链(p-chain)

$$c_p = \sum_i a_i \sigma_i^p, \tag{3.145}$$

流形 M 中所有 p-链的集合，

$$C_p(M) = \{c_p\} \tag{3.146}$$

在加法下构成群，这是一个 Abel 群。引入边界算子∂，将 p 维单形映射为 $p-1$ 维单形

$$\partial: C_p(M) \to C_{p-1}(M), \tag{3.147}$$

0 维链的边界定义为零。由此可以定义两个重要子群

$$Z_p = \{z_p \mid \partial z_p = 0,\ z_p \in C_p(M)\}, \tag{3.148}$$

称为 p-闭链(p-cycle)。

$$B_p = \{b_p = \partial c_{p+1} \mid c_{p+1} \in C_{p+1}(M)\}, \tag{3.149}$$

称为 p-边界链。由于边界的边界为零，故边界链群 B_p 是闭链群 Z_p 的子群。定义商群

$$H_p(M) = Z_p(M)/B_p(M), \tag{3.150}$$

称为流形 M 的 p-阶同调群(homology group)。C_p，B_p 和 Z_p 都和

流形的三角剖分有关,但同调群 $H_p(M)=Z_p(M)/B_p(M)$ 与剖分无关,是拓扑不变量。和同伦群不同的是,对于 n 维流形 M,其同调群最多是 n 阶的。我们将 p-阶同调群的秩(相当于维数)称为流形的 p 阶贝蒂(Betti)数

$$b_p=\dim H_p(M)。\tag{3.151}$$

它是流形的拓扑不变量。流形上各阶贝蒂数的交替和称为流形的欧拉数

$$\chi(M)=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p b_p。\tag{3.152}$$

欧拉数是标志流形平庸程度的一个重要的拓扑数。可以证明,这和由三角剖分得到的欧拉数是相同的。对于 n 维球面 S^n,有

$$H_n(S^n)=H_0(S^n)=Z,\ H_k(S^n)=0,\ 0<k<n。\tag{3.153}$$

故

$$\chi(S^n)=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p b_p=1+(-1)^n=\begin{cases}2,\text{当 } n \text{ 为偶数},\\0,\text{当 } n \text{ 为奇数}。\end{cases}\tag{3.154}$$

对于二维环面 T^2,有

$$H_0(T^2)=Z,\ H_1(T^2)=Z\oplus Z,\ H_2(T^2)=Z,\tag{3.155}$$

$$\chi(T^2)=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p b_p=1-2+1=0。\tag{3.156}$$

§3.4 纤 维 丛

纤维丛将拓扑与微分几何相结合,研究流形的整体性质和局域性质之间的关系,许多物理理论都可以用纤维丛理论来描写,如规范场理论和广义相对论等。

1. 纤维丛的定义

设有一个流形 M,称之为底流形,另一个流形 F,称之为纤维,则流形 M 及 M 上的纤维 F 组成的纤维丛 $E = E(M, F)$ 是这样一个流形,局域地,E 是 M 和 F 的直积空间。但在整体上一般不能写成两者的直积。如果整体的拓扑结构也是直积空间,则称之为平凡丛。如对于圆柱面,整体上是圆环 S^1 与直线的直积,所以是平凡丛。但对墨比乌斯带,局域地是两个空间的直积,但整体上不能写成 S^1 与直线的直积,是最简单的非平凡丛。若底流形 M 可以用坐标领域 $\{U_i\}$ 来描写,则丛 E 可以用 $\{U_i \times F\}$ 来描写。在交迭区域 $U_i \cap U_j$,可以用一族所谓的转移函数 $\{\Phi_{ij}\}$ 来描写纤维之间的变换,即

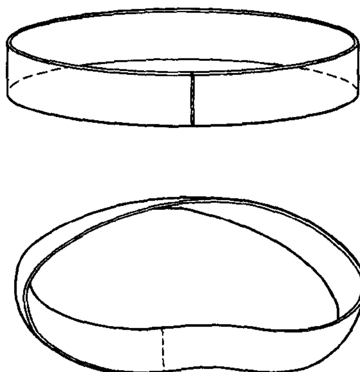


图 3.6

$$\Phi_{ij}: F|_{U_i} \to F|_{U_j}, \ x \in U_i \cap U_j。 \quad (3.157)$$

这些转移函数的全体构成群,称为丛 E 的结构群。平凡丛的结构群只包含单位元。纤维丛的严格定义还需要引入一个投影映射,

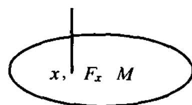


图 3.7

$$\pi: E \to M, \ \pi(u) = x, \ x \in M, \ u \in E, \quad (3.158)$$

其逆变换在底流形 M 上每点 x 处得纤维 F_x

$$\pi^{-1}: x \to F_x, \quad (3.159)$$

流形 M 所有点上的纤维都相互同构,都与标准纤维 $F = R^k$ 同构。因此,纤维丛的严格定义包括了底流形 M,流形上的纤维 F,结构群 G 及投影映射 π。即

$$E = E(M, F, \pi, G)。\tag{3.160}$$

如果时间空间都是绝对的，则四维时空 $M^4 = R^1 \times R^3$ 可以看成是底流形为 R^1、流形上的纤维为 R^3、结构群为平凡群的一个平凡丛，

$$E = (R^1, R^3)。\tag{3.161}$$

下面给出截面的定义。

定义 纤维丛 E 的一个局部截面是一个 C^∞ 映射

$$\sigma: U \to E,\tag{3.162}$$

其中 U 是底流形 M 的一个开邻域，使得

$$\pi \circ \sigma(x) = x, \ \forall x \in U。\tag{3.163}$$

如果 $U = M$，则

$$\sigma: M \to E\tag{3.164}$$

是一个整体截面。丛 E 的截面是一种规则，它建立了底流形 M 中的每一点 x 和相应纤维 F 上的点的对应关系。通过局部坐标 $\{U_i\}$ 定义的截面就是局部截面。整体截面的存在与否和丛 E 的整体性质有关。对墨比乌斯带，在底流形 S^1 上可以用两个半圆 $U_\pm$ 为局部坐标片。

$$U_+ = \{\theta: -\varepsilon < \theta < \pi + \varepsilon\}, U_- = \{\theta: \pi - \varepsilon < \theta < \varepsilon\},\tag{3.165}$$

纤维 F 即为实轴上线段$[-1, 1]$。因此纤维丛结构可以局域地用

$$U_+ \times F, \text{坐标为}(\theta, t_+)\text{及} U_- \times F, \text{坐标为}(\theta, t_-)\tag{3.166}$$

来描写。在交叠区域 $U_+ \cap U_-$（即 $-\varepsilon < \theta < \varepsilon$, $\pi - \varepsilon < \theta < \pi + \varepsilon$，分别记为Ⅰ，Ⅱ）。转移函数可取为

$$\text{Ⅰ}: t_+ = t_-, \ \text{Ⅱ}: t_+ = -t_-。\tag{3.167}$$

因此结构群为 $G = \{1, -1\}$，是一个二阶群。

2. 矢量丛

现在考虑纤维丛 $E=E(M, F, \pi, G)$，其中底流形 M 为 n 维空间，纤维 F 为 k 维矢量空间。k 与 n 可以不相等。结构群 $G=GL(k, R)$ 为一般线性群，即为 k 维矢量空间的变换群。称丛 E 为矢量丛，可以把矢量丛看成是用底流形 M 来参数化的一族矢量空间。如果纤维是李群流形的话则称之为主丛。

对 M 的某个邻域 U_i，可以取局部坐标

$$x=(x^1, x^2, \cdots, x^n)。\tag{3.168}$$

对应每一点 x 上的 k 维纤维，可以选取基

$$\{e_1(x), e_2(x), \cdots, e_k(x)\}。\tag{3.169}$$

基的集合称为标架。则 F 中的任意矢量可以表示为

$$X=\xi^i(x)e_i(x)。\tag{3.170}$$

丛 E 上的点可以用坐标

$$(x, \xi)=(x^1, x^2, \cdots, x^n; \xi^1(x), \xi^2(x), \cdots, \xi^k(x))\tag{3.171}$$

来表示。如果纤维空间 F 是一维矢量空间，则相应的矢量丛称为线丛。这是一族用底流形 M 来参数化的直线。把墨比乌斯带的间隔[-1, 1]用 R 代替，就得到 S^1 上的实线丛。

如果在 $x\in M$ 点上的纤维就是该点的切空间 $T_x(M)$ 或者余切空间 $T_x^*(M)$，则相应的矢量丛称为切丛 $T(M)$ 或余切丛 $T^*(M)$。如果已经取局部坐标 $x=(x^1, x^2, \cdots, x^n)$，可取标准基

$$T(M):(\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \cdots, \partial/\partial x_n),\tag{3.172}$$

$$T^*(M):(\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \cdots, \mathrm{d}x_n)。\tag{3.173}$$

切矢量可以表示为

$$v_x = v^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{3.174}$$

余切矢量可以表示为

$$w_x = w_i(x)\mathrm{d}x^i。 \tag{3.175}$$

如果U'是另一个邻域,相应的局部坐标为x',则在交迭区域$U \cap U'$,我们有

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \left(\frac{\partial x'^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x'^j}, \tag{3.176}$$

$$\mathrm{d}x^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\mathrm{d}x'^j。 \tag{3.177}$$

切矢量场$X(x)$即为切矢量丛$T(M)$的一个截面。当选取局部坐标系后,可表示为

$$X(x) = \xi^i(x)\partial_i。 \tag{3.178}$$

如果令$L(M)$为M上所有切丛截面(切矢量场)的集合,则可定义矢量场间的加法和矢量场的数乘(实际上可以与任意可微函数乘),因而构成矢量空间。通常将这个矢量空间的基矢量称为标架场。并且,对于其中任意两个矢量场

$$X(x) = \xi^i(x)\partial_i, \; Y(x) = \eta^i(x)\partial_i, \tag{3.179}$$

可以定义对易子运算

$$[X, Y] = (\xi^i\partial_i\eta^k - \eta^i\partial_i\xi^k)\partial_k = Z(x) \in L(M)。 \tag{3.180}$$

因此集合$L(M)$构成实数域上的李代数。

余切矢量场$W(x)$即为余切矢量丛$T^*(M)$的一个截面。当选取局部坐标系后,可表示为

$$W(x) = \omega_i(x)\mathrm{d}x^i。 \tag{3.181}$$

余切矢量场$W(x)$又称为普法夫(Pfaff)形式或微分1-形式。它与切矢量场对偶,即

$$\langle W(x), X(x)\rangle = \omega_i(x)\xi^i(x)。 \tag{3.182}$$

3. 联络

在讨论纤维丛的局部性质时，需要引入联络的概念。联络定义了协变微商和矢量沿底流形 M 上的曲线进行平行移动的方式。考虑 R^3 中的单位球面 S^2，球面上的点可用坐标

$$\boldsymbol{n}(\theta,\ \phi) = (\sin\theta\cos\phi,\ \sin\theta\sin\phi,\ \cos\theta),\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi, \tag{3.183}$$

$\boldsymbol{n}(\theta,\ \phi)$ 也是球面上的单位法向矢量。由此可得诱导的度规

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} \partial_\theta \boldsymbol{n} \cdot \partial_\theta \boldsymbol{n} & \partial_\theta \boldsymbol{n} \cdot \partial_\phi \boldsymbol{n} \\ \partial_\phi \boldsymbol{n} \cdot \partial_\theta \boldsymbol{n} & \partial_\phi \boldsymbol{n} \cdot \partial_\phi \boldsymbol{n} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}, \tag{3.184}$$

球面上两点的距离可以表示为

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{n} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{n} = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j = \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2。 \tag{3.185}$$

定义矢量

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \partial_\theta \boldsymbol{n} = (\cos\theta\cos\phi,\ \cos\theta\sin\phi,\ -\sin\theta), \\ \boldsymbol{u}_2 &= \partial_\phi \boldsymbol{n} = (-\sin\theta\sin\phi,\ \sin\theta\cos\phi,\ 0)。 \end{aligned} \tag{3.186}$$

这是球面上的两个切矢量，可以作为切空间的基。有

$$\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{n} = 0。 \tag{3.187}$$

任意切矢量都可以用 $\boldsymbol{u}_1$ 和 $\boldsymbol{u}_2$ 表示出来。下面来计算偏微分

$$\partial_\theta \boldsymbol{u}_1 = (-\sin\theta\cos\phi,\ -\sin\theta\sin\phi,\ -\cos\theta) = -\boldsymbol{n},$$

$$\partial_\phi \boldsymbol{u}_1 = (-\cos\theta\sin\phi,\ \cos\theta\cos\phi,\ 0) = (\cos\theta/\sin\theta)\boldsymbol{u}_2 = \cot\theta\boldsymbol{u}_2,$$

$$\partial_\theta \boldsymbol{u}_2 = (-\cos\theta\sin\phi,\ \cos\theta\cos\phi,\ 0) = \cot\theta\boldsymbol{u}_2,$$

$$\partial_\phi \boldsymbol{u}_2 = (-\sin\theta\cos\phi,\ \sin\theta\sin\phi,\ 0) = -\sin^2\theta\boldsymbol{n} - \sin\theta\cos\theta\boldsymbol{u}_1。$$

现在可以定义关于切矢量 $\boldsymbol{x}$ 的协变微商 ∇_x：

$$\nabla_{u_1}\boldsymbol{u}_1 = 0,\ \nabla_{u_1}\boldsymbol{u}_2 = \nabla_{u_2}\boldsymbol{u}_1 = \cot\theta\boldsymbol{u}_2,\ \nabla_{u_2}\boldsymbol{u}_2 = -\sin\theta\cos\theta\boldsymbol{u}_1, \tag{3.188}$$

由此定义了 S^2 上的列维-奇维塔(Levi-Civita)联络。将上式写成

$$\nabla_{u_i} \boldsymbol{u}_j = \boldsymbol{u}_k \Gamma^k_{ij}, \tag{3.189}$$

其中联络的克氏(Christoffel)符号为

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \cot\theta,\ \Gamma^1_{22} = -\sin\theta\cos\theta, \text{其余 } \Gamma^k_{ij} = 0。 \tag{3.190}$$

我们可以一般地来定义协变微分,即定义映射∇,满足

(1) 线性:

$$\nabla(aX + bY) = a\nabla X + b\nabla Y,\ a,\ b \in R, \tag{3.191}$$

(2) 莱布尼茨规则:

$$\nabla(X \otimes Y) = (\nabla X) \otimes Y + X \otimes (\nabla Y), \tag{3.192}$$

$$\nabla\langle W,\ X\rangle = \langle \nabla W,\ X\rangle + \langle W,\ \nabla X\rangle, \tag{3.193}$$

(3) 对于函数 f,有

$$\nabla f = \mathrm{d}f, \tag{3.194}$$

(4) 当切矢量取局部坐标后,$X = \xi^a e_a$,则有

$$\nabla X = \mathrm{d}\xi^a \otimes e_a + \xi^a \nabla e_a。 \tag{3.195}$$

由上式可见,知道了对基矢量的协变微分,就可以得到对所有张量的协变微分。根据前面的例子,可以将对基矢量的作用写成

$$\nabla e_a(x) = \Gamma^b_a(x) e_b(x), \tag{3.196}$$

其中

$$\Gamma^b_a(x) = \Gamma^b_{ia}(x)\mathrm{d}x^i, \tag{3.197}$$

称为联络 1-形式。这样,对切矢量的协变微分可以写成

$$\nabla X = (\mathrm{d}\xi^a + \xi^b \Gamma^a_b) e_a。 \tag{3.198}$$

加上联络之后,使得张量场的协变微分仍为张量场。由切丛联络可以得到余切丛上的诱导联络,利用基矢量的对偶关系可以得到

$$\nabla\langle\theta^a,\ e_b\rangle = 0 \rightarrow \nabla\theta^a = -\Gamma^a_b\theta^b。 \tag{3.199}$$

因此,余切矢量 $W = \omega_a(x)\theta^a(x)$ 的协变微分可以写成

$$\nabla W = (\mathrm{d}\omega_b - \omega_b \Gamma^b_a)\theta^a。\tag{3.200}$$

张量场 K 沿 X 方向的协变微分定义为

$$\nabla_X K = \langle \nabla K,\ X \rangle,\tag{3.201}$$

选局部坐标系后,沿自然基$\{\partial_i\}$的方向导数可以定义为

$$\nabla_i K = \langle \nabla K,\ \partial_i \rangle,\ \nabla K = (\nabla_i K)\mathrm{d}x^i。\tag{3.202}$$

对切矢量 X,有

$$\begin{aligned}\nabla X &= (\mathrm{d}\xi^a + \Gamma^a_b \xi^b)e_a = (\partial \xi^a / \partial x^i + \Gamma^a_{ib}\xi^b)e_a \mathrm{d}x^i \\ &= (\xi^a_{,i} + \Gamma^a_{ib}\xi^b)e_a \mathrm{d}x^i = \xi^a_{;i} e_a \mathrm{d}x^i。\end{aligned}\tag{3.203}$$

因此

$$\nabla_i X = \xi^a_{;i} e_a\tag{3.204}$$

仍是切矢量场。可以证明,联络不是张量,联络的选择具有一定的任意性。但由联络可以得到一个重要的量,曲率 2-形式,Ω 定义为

$$\Omega^a_b = \mathrm{d}\Gamma^a_b + \Gamma^a_c \wedge \Gamma^c_b \quad 或 \quad \Omega = \mathrm{d}\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma。\tag{3.205}$$

可以证明曲率 2-形式是流形上的张量场。这是流形上的一个很重要的量。由此可以得到

$$\mathrm{d}\Omega = \Omega \wedge \Gamma - \Gamma \wedge \Omega,\tag{3.206}$$

称为比安基(Bianchi)恒等式,这是流形上联络所必须满足的条件。这相当于协变导数所满足的雅可比恒等式

$$[[\nabla_X,\ \nabla_Y],\ \nabla_Z] + [[\nabla_Y,\ \nabla_Z],\ \nabla_X] + [[\nabla_Z,\ \nabla_X],\ \nabla_Y] = 0。\tag{3.207}$$

取局部坐标系后可以写成

$$\Omega^a_b = \frac{1}{2} R^a_{bjk} \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k,\tag{3.208}$$

其中

$$R^a_{bjk} = \Gamma^a_{kb,j} - \Gamma^a_{jb,k} + \Gamma^a_{jc}\Gamma^c_{kb} - \Gamma^a_{kc}\Gamma^c_{jb}。 \tag{3.209}$$

如果定义算子

$$R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}, \tag{3.210}$$

则有

$$R(\partial_i, \partial_k)e_b = R^a_{bik}e_a。 \tag{3.211}$$

因此,曲率张量和协变导数的不可对易性有关。对于黎曼流形,联络可以用度规张量及其导数表示

$$\Gamma^m_{ik} = \frac{1}{2}g^{mj}(\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{kj} - \partial_j g_{ik}), \tag{3.212}$$

称为黎曼联络。而曲率张量为

$$R^l_{ijk} = \Gamma^l_{ik,j} - \Gamma^l_{ij,k} + \Gamma^l_{jm}\Gamma^m_{ik} - \Gamma^l_{km}\Gamma^m_{ij}。 \tag{3.213}$$

由曲率张量指标缩并可以得到里奇(Ricci)张量

$$R_{ik} = R^l_{ijk}, \tag{3.214}$$

进一步缩并得到曲率标量

$$R = g^{ij}R_{ij}。 \tag{3.215}$$

爱因斯坦由此建立了广义相对论的基本方程

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R + \Lambda g_{ik} = 8\pi G T_{ik}, \tag{3.216}$$

即时空的性质由其中的物质分布所决定。对于规范场,联络即规范势

$$A(x) = A^a_\mu(x)T^a \mathrm{d}x^\mu。 \tag{3.217}$$

而曲率即为规范场强

$$F = \mathrm{d}A + A \wedge A = \frac{1}{2}F^a_{\mu\nu}(x)T^a \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu, \tag{3.218}$$

其中

$$F_{\mu\nu}^{a}(x)=\partial_{\mu}A_{\nu}^{a}(x)-\partial_{\nu}A_{\mu}^{a}(x)+f_{bc}^{a}A_{\mu}^{b}(x)A_{\nu}^{c}(x)。\tag{3.219}$$

常数 f_{bc}^{a} 为规范群的结构常数。F 满足比安基恒等式

$$\mathrm{d}F+A\wedge F-F\wedge A=0。\tag{3.220}$$

作用量可以写成

$$S=\int_{M}\mathrm{tr}(F\wedge {}^{*}F)。\tag{3.221}$$

4. 示性类

纤维丛通常用一些拓扑不变的整数(称为示性数)来标志其和平庸丛的偏离,当我们引入联络以后,这些示性数可以用由联络表示的示性类在整个底流形上的积分表示出来。但积分的结果(示性数)与联络的选择无关,是拓扑不变量。在纤维丛上可以定义很多不同的示性类,如斯蒂弗尔-惠特尼类、庞特里亚金(Pontrjagin)类、陈(陈省身)类和欧拉类等。对于 $2n$ 维黎曼流形,欧拉类定义为

$$e(M)=\frac{1}{2^{k}k\,!\,(2\pi)^{k}}\epsilon_{a_{1}\cdots a_{2k}}\Omega^{a_{1}a_{2}}\wedge\cdots\wedge\Omega^{a_{2k-1}a_{2k}}。\tag{3.222}$$

欧拉类对底流形积分即得欧拉数

$$\chi(M)=\int_{M}e(M),$$

此即高斯-博内(Gauss-Bonnet)定理,是更一般的阿蒂亚-辛格(Atiyah-Singer)指标定理的特例。

§3.5* 拓扑缺陷

1. 畴壁(Domain Wall)

畴壁的出现一般联系于离散对称性的破缺,真空流形 M 将有

数个不连通的分支。畴壁发生于不同分支空间区域之间的边界上。具有双阱势的最简单戈德斯通模型就存在一个畴壁解，

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi-\frac{\lambda}{4}(\phi^{2}-\eta^{2})^{2}。\tag{3.223}$$

从(3.223)式可以得到 ϕ 场的运动方程

$$\frac{\partial^{2}\phi}{\partial x^{2}}-\lambda\phi(\phi^{2}-\eta^{2})=0。\tag{3.224}$$

上述方程有称为纽折(kink)解的解析解：

$$\phi(x)=\eta\tanh\left[\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\eta x\right]。\tag{3.225}$$

显然，畴壁的曲率半径比它的厚度要大得多。畴壁的厚度约为

$$\delta\sim(\sqrt{\lambda}\eta)^{-1}。\tag{3.226}$$

在壁的中心，真空能量 $\rho\sim\lambda\eta^{4}$，表面能量密度 $\sigma\sim\rho\delta\sim\sqrt{\lambda}\eta^{3}$。利用能动张量公式

$$T_{\mu\nu}=\partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi-g_{\mu\nu}\cdots\tag{3.227}$$

我们有

$$T_{\mu}^{\mu}=\frac{1}{2}\lambda\eta^{4}\left[\cosh\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\eta x\right)\right]^{-4}。\tag{3.228}$$

由这些方程即可导出表面能的精确表达式

$$\sigma=\int T_{0}^{0}\mathrm{d}x=\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{\lambda}\eta^{3}。\tag{3.229}$$

2. 弦(string)

如果真空流形 M 不是单连通的，或者说 M 含有洞就可能引起弦。从拓扑上来说，M 具有非平庸的基本群，$\pi_{1}(M)\neq I$。最简单的例子可以考虑 U(1)规范理论，拉格朗日函数为

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}D_{\mu}\Phi^{+}D^{\mu}\Phi-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\lambda\left(\Phi^{+}\Phi-\frac{1}{2}\eta^{2}\right)^{2}。\tag{3.230}$$

其中

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu,\ D_\mu\Phi=\partial_\mu\Phi-\mathrm{i}eA_\mu, \qquad (3.231)$$

依照§2.5中的讨论，该理论是对称性自发破缺的，真空流形 M 由满足 $\langle|\Phi|\rangle^2=\frac{1}{2}\eta^2$ 的点构成。自发破缺后的物理态由质量为 $M_S^2=2\lambda\sigma^2$ 的标量粒子与质量为 $M_V^2=e^2\sigma^2$ 的矢量粒子构成。

运动方程的弦解首先是由尼尔森(H. B. Nielsen)和奥利森(P. Olesen)发现的。在 z 方向上的无限长直弦解是

$$\Phi\sim(\eta/\sqrt{2})\exp(\mathrm{i}n\theta),\ A_\mu\sim-\mathrm{i}e^{-1}\partial_\mu[\ln(\sqrt{2}\Phi/\sigma)], \qquad (3.232)$$

其中 θ 是 $x-y$ 平面上的极角，n 是弦的绕数。在通常情形下，我们仅对 $n=1$ 的情形感兴趣，因为 $n>1$ 的弦将衰变成 n 条弦。利用(3.232)式容易证明，$\partial_\mu\Phi$ 和 A_μ 对于 $D_\mu\Phi$ 的贡献互相抵消，所以在大距离上 $F_{\mu\nu}\to 0$ 以及 $\partial_\mu\Phi\to 0$。从而尼尔森-奥利森弦是有限能的。

无限长直弦的单位长度能量

$$\mu\equiv\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}z}=\int r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathscr{H}=-\int r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathscr{L}$$

$$=\int_0^\infty\int_0^{2\pi}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\left[\left|\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right|^2+\left|\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}-\mathrm{i}eA_\theta\Phi\right|^2+V(\Phi)+\frac{B^2}{2}\right], \qquad (3.233)$$

其中 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ 是联系于U(1)规范场的“磁”场。在弦内总磁流是 $n(2\pi/e)$。由于 A_μ 和 Φ 没有精确的解析解，只有数值解和近似的解析解

$$\Phi=\frac{\eta}{\sqrt{2}}[1-\exp(-r/r_1)]\exp(-\mathrm{i}\theta), \qquad (3.234)$$

$$A_\mu=\frac{[1-\exp(-r/r_2)]^2}{er},$$

其中 r_1 和 r_2 正比于 η^{-1}，并依赖于耦合常数 e 和 λ。所以，除了在

$M_V = M_S$ 的特殊情形，μ 不能在精确形式下计算。在后者情形下，A_μ 和 Φ 的运动方程退耦，$\mu = \pi\eta^2$。就一般情形而言，μ 是$M_V^2/M_S^2 = e^2/2\lambda$ 的缓变函数。

弦解一般联系于下述对称破缺 $G \to H$，真空流形 $M = G/H$ 含有不可收缩的圈，即圆周到 M 上的映射不是平庸的。在上述例子中，$G = \mathrm{U}(1)$，$H = I$，以及 $M = \mathrm{U}(1)$。U(1)群的群流形能表示成圆周上的点。所以 $\pi_1[\mathrm{U}(1)]$ 是圆周到其自身的映射。这样的映射可用它的绕数来表征，即 $\theta \to n\theta (n = 0, 1, \cdots)$ 来表征，所以 $\pi_1[\mathrm{U}(1)] = Z$，这是一个整数加法群。

3. 单极子(monopole)

单极子是类点状拓扑缺陷，它也可以在对称自发破缺的规范理论中得到。最简单的模型是 SO(3)→U(1)规范理论，拉格朗日函数为

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}D_\mu\Phi^a D^\mu\Phi^a - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{\lambda}{8}(\Phi^+ \Phi - \eta^2)^2, \tag{3.235}$$

其中

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - e\varepsilon^{abc}A_\mu^b A_\nu^c,$$

$$D_\mu\Phi^a = \partial_\mu\Phi^a - e\varepsilon^{abc}A_\mu^b\Phi^c,$$

$a = 1, 2, 3$ 是群指标。通过希格斯机制，SO(3)的 3 个规范玻色子中 2 个获得质量 $M_V^2 = e^2\eta^2$，并存在一个物理的希格斯粒子，它的质量为 $M_S^2 = \lambda\sigma^2$。

考虑所谓的“刺猬”场相，使 Φ^a 的方向平行于位形空间的单位矢量$\hat{r}$。当 $r \to \infty$ 时，求对称解为

$$\begin{aligned} &\Phi^a(r, t) \sim \eta\hat{r}^a, \\ &A_\mu^a(r, t) \sim \varepsilon_{\mu ab}\hat{r}^b/er。\end{aligned} \tag{3.236}$$

正如畴壁和宇宙弦解一样，连续性要求希格斯场当 $r \to 0$ 时为零。单极子的尺寸，即 $\Phi^a\Phi^a \neq \eta^2$ 的区域大约是 η^{-1}阶的。刺猬场相的

能量来源于两种贡献，真空能以及它的空间变化梯度能量。具体计算方式为

$$E=\int \mathrm{d}^3 x\mathscr{H}=-\int \mathrm{d}^3 x\mathscr{L}$$
$$=\frac{4\pi}{e^2}\int_0^\infty \mathrm{d}r\Big[K'^2+\frac{(K^2-1)^2}{2r^2}+\frac{H^2K^2}{r^2}$$
$$+\frac{(rH'-H)^2}{2r^2}+\frac{\lambda r^2}{8e^2}\Big(\frac{H^2}{r^2}-\eta^2 e^2\Big)^2\Big], \tag{3.237}$$

其中“′”表示对 r 的导数，$K(r)$和 $H(r)$通过下式定义

$$\Phi^a=\frac{H(r)\,\hat{r}^a}{er},$$
$$A_0^a=0,\ A_i^a=\frac{\varepsilon^{aij}\,\hat{r}^j[1-K(r)]}{er}。 \tag{3.238}$$

函数 $K(r)$和 $H(r)$依赖于 $\sqrt{\lambda}/e=M_S/M_V$，在通常的情形下不存在精确解。但是，在所谓的普拉萨德-萨默菲尔德(Prasad-Sommerfield)极限 $M_S/M_V\to 0$ 下，有精确解

$$K(r)=\frac{r/r_0}{\sinh(r/r_0)}, \tag{3.239}$$
$$H(r)=(r/r_0)\coth(r/r_0)-1,$$

其中 $r_0=(e\eta)^{-1}$。在普拉萨德-萨默菲尔德极限下，单极子质量为 $m_M=4\pi\eta/e=M_V/\alpha$。

如果真空流形 $M=G/H$ 含有不可收缩的曲面，那么规范场相和希格斯场相将对应于单极子场相，这就是说，二维球面到 M 上的映射是非平庸的。从拓扑上来说，当 $\pi_2(M)\neq I$ 时，理论可能产生单极子解。如果 G 的群流形是单连通的，那么 $\pi_2(G/H)=\pi_1(H)$。如果群流形不是单连通的，上述结果推广成 $\pi_2(G/H)=\pi_1(H)/\pi_1(G)$。在我们的例子中，$G=\mathrm{SO}(3)$，$H=\mathrm{U}(1)$，所以

$$\pi_2(\mathrm{SO}(3)/\mathrm{U}(1))=\pi_1(\mathrm{U}(1))/\pi_1(\mathrm{SO}(3))=Z/Z_2, \tag{3.240}$$

即模为 2 的整数加法群。

4. 纹理(texture)

在三维空间中,一种新型的拓扑缺陷——纹理是由三维球面 S^3 到真空流形 M 的非平庸映射来表征的。描述纹理的最方便的方法,可从一维和二维的非奇异孤子开始,它们分别用 $\pi_1(M)$ 和 $\pi_2(M)$ 的元来分类。首先考虑具有墨西哥草帽势的复标量场 $\phi(x, t)$,该理论的真空是一个圆周,所以 $\pi_1(M) = Z$。现在假定当 $x \to \pm\infty$ 时,ϕ 趋向于相同的值。这一边界条件导致了一条与圆周拓扑等价的直线,场相可以具有非平庸的绕数。三重态场 ϕ^a 能以类似的方式构成二维的纹理,ϕ^a 场在无穷远处有相同的边界条件,并且真空流形为 S^2。类似地,S^3 到三维纹理的真空流形 M 的映射是非平庸的,即 $\pi_3(M) \neq I$。

5. 拓扑缺陷的同伦群分类

在上述讨论中,已经看到真空流形的拓扑决定了在一个特殊的对称性破缺下,缺陷是否存在。利用同伦论,我们可以用 $\pi_n(M)$ 对真空流形分类,这一工作首先是由基布尔(T. W. B. Kibble)建议的。

拓扑缺陷	维　数	分　类
畴　壁	2	$\pi_0(M)$
弦	1	$\pi_1(M)$
单极子	0	$\pi_2(M)$
纹　理	—	$\pi_3(M)$

基布尔认为,在宇宙膨胀时,宇宙温度将会下降,宇宙发生相变,从而产生各种拓扑缺陷。这个产生机制称为基布尔机制。基布尔指出,在宇宙学相变时,任何关联长度总是以粒子视界为界。粒子视界是指在宇宙时间内无质量粒子能够传播的最大距离

$$d_H = a(t)\int_0^t \frac{\mathrm{d}t}{a(t)}。 \tag{3.241}$$

如果假设宇宙按幂律膨胀，$a \propto t^n (n > 1)$，则 $d_H = t/(n-1)$。关联长度是联系于有关集合的最大距离，在该距离内希格斯场是相关的。

§3.6* 群流形的同伦群

1. $\pi_1(M)$的计算

将紧致连通李群 G 嵌入到更大的单连通群$\widetilde{G}$中是可能的，$\pi_1(\widetilde{G}) = I$，称$\widetilde{G}$为 G 的通用覆盖群。作为最熟知的例子，三维正旋转群 SO(3)是单连通的，而它具有覆盖群 SU(2)。将 G 扩大到$\widetilde{G}$，未破缺子群也应包含在$\widetilde{G}$中的附加元，即 H 也应扩大到$\widetilde{H}$。由于增加部分能够相消，这些变化并不影响到真空 G/H。

与 G 群不同，子群 H 可以是不连通的。含有单位元 e 的 H_0 分支是 H 的正规子群，即满足 $hh_0h^{-1} \in H_0$，其中 $h_0 \in H_0$，$h \in H$。不连接的各连通分支构成 H_0 的陪集，H/H_0，由于 H_0 是正规的，所以 H/H_0 是一个商群。该商群经常标记成 $\pi_0(H)$。这些简明叙述导致了下述定理，该定理的严格证明读者可参考希尔顿(P. J. Hilton)关于同伦论的专著。

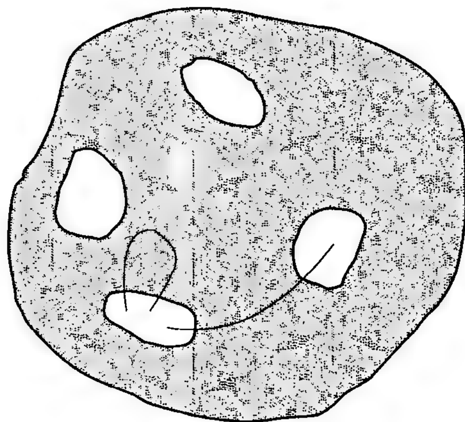


图 3.8

定理 设 G 是连通且单连通李群，存在一个子群 H，含有单位元的连通分支为 H_0，商群 $\pi_0(H) = H/H_0$ 标记 H 的不连通分

支数,那么陪集空间的基本群 $\pi_1(G/H)$ 与 $\pi_0(H)$ 同构,

$$\pi_1(G/H) \cong \pi_0(H)。 \tag{3.242}$$

利用(3.242)式,弦解的存在性问题就约化成计算未破缺子群 H 的连通性问题。下面将具体计算 4 个对称破缺例子。

(1) $\mathrm{U}(1) \to I$

在 § 3.5 中,已经讨论过 U(1)规范弦解。但是,为了使用上述定理,必须考虑多连通的 U(1)群的覆盖群 $\widetilde{G}$—1 维直线平移群 R,R 的每一个区间 $[2\pi(n-1),\ 2\pi n]$ 都能 1-1 映射到 U(1)上,即 $\mathrm{U}(1) \simeq R/Z$。未破缺子群 $\widetilde{H}$ 由平移集 $\{2\pi n\}$ 组成,即整数加法群 Z。由此,可得 $\pi_1[\mathrm{U}(1)] \cong \pi_0(Z) \cong Z$。

(2) $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{U}(1)$

由于 SU(2)是单连通的,U(1)是连通的 $(\pi_0[\mathrm{U}(1)] = I)$,可以直接猜出这一对称破缺不产生弦。

(3) $\mathrm{SU}(2) \to Z_2$

由于 $H \cong Z_2$ 是双连通的,弦解是被期望存在的。仅仅存在两个拓扑区别的基态,一个具有 Z_2 弦,另一个不具有 Z_2 弦。在真实的物理模型中,对称破缺 $\mathrm{Spin}(10) \to \mathrm{SU}(5) \times Z_2$,也保留了一个未破缺的 Z_2 对称性,由此产生弦。

(4) $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{U}(1) \times Z_2$

这是利用 3×3 对称无迹张量场 Φ 构成的 SU(2)群五维表示产生的对称破缺。在这一情形,未破缺子群 U(1)联系于绕 z 轴的转动并加上一个绕 x 轴 180°的转动 $R_0 = \mathrm{diag}(1, -1, -1)$。未破缺子群 H 包含一个离散对称性,所以弦再次被分类为

$$\pi_0[\mathrm{U}(1) \times Z_2] \cong \pi_0[\mathrm{U}(1)] + \pi_0(Z_2) \cong Z_2。 \tag{3.243}$$

这类 Z_2 弦与(3)中的 Z_2 弦有本质的不同。R_0 能起到荷共轭算子的作用,所以荷电粒子绕弦一周后将具有相对的荷。这样的性质,类似于爱丽丝的镜中奇缘,为此这类弦命名为爱丽丝弦。

2. $\pi_2(M)$的计算

如果真空流形 M 是以李群的陪集空间形式描述的话,第二同

伦群的计算也将得到较大的简化。对于单连通群 G,有

$$\pi_2(G/H) \cong \pi_1(H), \qquad (3.244)$$

其中 H_0 是未破缺子群与单位元连通的分支。由于单极子与G/H中的不可收缩曲面相联系,即单极子的存在性与 H 的多连通性相关。上述结论能够推广到 G 是非连通群的情形,

$$\pi_2(G/H) \cong \pi_1(H_0)/\pi_1(G_0), \qquad (3.245)$$

其中 G_0 是 G 与单位元连通的分支。

下面将具体地计算两个例子。

(1) $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{U}(1)$

在三重态希格斯场自发破缺中,未破缺子群是 U(1)。由于 SU(2)是单连通的,有如下的同构

$$\pi_2(\mathrm{SU}(2)/\mathrm{U}(1)) \cong \pi_1(\mathrm{U}(1)) \cong Z, \qquad (3.246)$$

即蕴涵着以整数 Z 分类的单极子解。

(2) $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{U}(1) \times Z_2$

这是在本节(1)中考虑的例子,应用(3.245)式以及 $H_0 = \mathrm{U}(1)$,有

$$\pi_2(\mathrm{SU}(2)/\mathrm{U}(1) \times Z_2) \cong \pi_1[\mathrm{U}(1)] \cong Z。 \qquad (3.247)$$

3. 正合同伦序列

在前两小节中讨论的 $\pi_1(M)$和 $\pi_2(M)$计算方法,可以进一步推广到同伦群之间普遍的同态序列,经常被称作为正合同伦序列(exact homotopy sequence)。在这个方案的每一步,正合性要求每个同态象是下一个同态的核,

$$\begin{aligned} &\cdots \to \pi_n(G) \to \pi_n(G/H) \to \pi_{n-1}(H) \to \pi_{n-1}(G) \to \cdots \\ &\cdots \to \pi_1(G) \to \pi_1(G/H) \to \pi_0(H)。\end{aligned} \qquad (3.248)$$

如果考虑正合序列

$$G_1 \rightarrow G_2 \xrightarrow{\gamma} G_3 \rightarrow G_4, \tag{3.249}$$

在外面的两个群 G_1 和 G_4 是平凡群，那么同态 γ 应是一个同构。由于同态 $G_3 \rightarrow G_4$ 的核必须包含整个 G_3，所以映射必须是到上的。另一方面，从 $G_1 \rightarrow G_2$ 的同态蕴涵着 γ 的核仅由恒等元组成。因此，γ 必须是 1-1 对应的，所以，假如 $\pi_n(G) \cong \pi_{n-1}(G) \cong I$，那么

$$\pi_n(G/H) \cong \pi_{n-1}(H)。 \tag{3.250}$$

利用上述一般结果，有

$$\pi_1(G) \cong \begin{cases} Z, & G = \mathrm{U}(n)\ (n \geqslant 1),\ \mathrm{SO}(2), \\ Z_2, & G = \mathrm{SO}(n)\ (n \geqslant 3), \\ I, & \text{其他紧致李群 } G。 \end{cases} \tag{3.251}$$

$$\pi_2(G) \cong I。 \tag{3.252}$$

$$\pi_3(G) \cong \begin{cases} I, & G = \mathrm{U}(1),\ \mathrm{SO}(2), \\ Z \oplus Z, & G = \mathrm{SO}(4), \\ Z, & \text{其他紧致李群 } G。 \end{cases} \tag{3.253}$$

$$\pi_4(G) \cong \begin{cases} I, & G = \mathrm{SU}(n)\ (n \geqslant 3),\ \mathrm{SO}(n)\ (n \geqslant 6),\ G_2,\ F_4,\ E_n \\ Z_2, & G = \mathrm{USp}(2n),\ \mathrm{SU}(2),\ \mathrm{SO}(3),\ \mathrm{Spin}(5),\ \mathrm{SO}(5) \\ Z_2 \oplus Z_2, & G = \mathrm{SO}(4),\ \mathrm{Spin}(4) \end{cases} \tag{3.254}$$

$$\pi_{4n+2}[\mathrm{USp}(2n)] \cong \begin{cases} Z_{2(2n+2)!}, & n \text{ 为奇数}, \\ Z_{(2n+2)!}, & n \text{ 为偶数}。 \end{cases} \tag{3.255}$$

$$\pi_{2n}[\mathrm{SU}(n)] = Z_{n!}。 \tag{3.256}$$

在 $n \geqslant (k-1)/4,\ k > 2$ 的情形，

$$\pi_k[\mathrm{USp}(2n)] \cong \begin{cases} Z, & k = 3,\ 7 \pmod 8, \\ Z_2, & k = 4,\ 5 \pmod 8, \\ I, & k = 0,\ 1,\ 2,\ 6 \pmod 8。 \end{cases} \tag{3.257}$$

在 $n \geqslant k+2$，$k \geqslant 2$ 的情形，

$$\pi_k[\mathrm{SO}(n)] \cong \begin{cases} Z, & k = 3, 7 \pmod 8, \\ Z_2, & k = 0, 1 \pmod 8, \\ I, & k = 2, 4, 5, 6 \pmod 8。 \end{cases} \tag{3.258}$$

在 $n \geqslant (k+1)/2$，$k \geqslant 2$ 的情形，

$$\pi_k[\mathrm{SU}(n)] \cong \begin{cases} Z, & k \text{ 为奇数}, \\ I, & k \text{ 为偶数}。 \end{cases} \tag{3.259}$$

第4章　非线性方程

随着科学研究的不断深入，非线性方程的求解受到越来越多的科学工作者的重视，从天文学、物理学、力学、地球科学到生命科学和各类工程技术科学领域，都会遇到各种各样的非线性方程。在物理学的各个领域内如流体力学、非线性光学(激光)、等离子体理论、量子场论等经常会遇到大量的非线性方程。19 世纪 30 年代开始注意到流体中的非线性现象，自 20 世纪 60 年代开始，非线性科学有了飞速的发展，取得了大量的成果。在非线性方程的求解方面也发展出了许多系统的方法。本章将简明地讨论非线性方程及其应用。

§4.1　非线性偏微分方程

在物理学的各个领域内经常会遇到大量的非线性方程，包括常微分方程、偏微分方程、差分方程和积分方程、函数方程等。本节将对非线性偏微分方程作一些简单介绍。

1. KdV 方程

1834 年，英国学者罗素(J. S. Russell)偶然观察到一种奇妙的水波，他在 1844 年的《论波动》一文中对此作了生动的描述："我正在观察一条船的运动，这条船被两匹马拉着，沿着狭窄的河道迅速前进。突然，船停了下来，河道内被船体带动的水团并不停止，它们聚集在船头周围激烈地扰动着，然后水浪呈现出一个滚圆而平滑、轮廓分明的巨大孤立波峰，它以巨大的速度向前滚动着，急速地离开了船头，在行进中它的形状和速度并没有明显的改变。我

骑在马上紧跟着观察,它以每小时约八九英里的速度向前,并保持长约三十英尺、高约一至一英尺半的原始形状。渐渐地,它的高度下降了,当我跟踪一至二英里,运河转了几个弯之后,它终于消失在逶迤的河道之中。”罗素认为,这种孤立波是流体运动的一个稳定解,但他当时并没有给出严格证明。直到60年后的1895年,荷兰著名数学家科特韦格(Korteweg)和他的学生德・瓦雷斯(de Vries)研究了浅水波的运动,建立了著名的KdV方程,证实了孤立波的存在。通常将KdV方程写成如下形式

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{4.1}$$

其中第二项是u的二次方,因而KdV方程是非线性方程。由于非线性方程不满足解的迭加原理,有人认为这种孤立波是不稳定的,没有什么物理意义。20世纪50年代,著名物理学家费米(E. Fermi)、帕斯塔(J. Pasta)和乌拉姆(S. Ulam)考虑了具有非线性相互作用的谐振子阵,初始时,所有能量都集中在一个振子上。本来预料长时间后能量分布应当达到平衡状态,但计算结果发现,经过长时间后几乎所有能量又回到初始的分布。能量达到平衡的概念是错的。这就是著名的FPU问题。1965年美国物理学家克鲁斯卡尔(M. D. Kruskal)和扎布斯基(N. J. Zabusky)用数值模拟方法详细考察和分析了等离子体中孤立波碰撞的非线性相互作用过程,得到了比较完整和丰富的结果,进一步证实了这一类孤立波相互作用后不改变波形的论断。到了20世纪70年代,物理学家伊克齐(H. Ikezi)、泰勒(R. J. Taylor)和贝克(D. R. Baker)等人终于在水箱实验中重现了拉塞尔的浅水波,即KdV型的孤立波。由于这种孤立波具有类似于粒子的性质,他们把这种孤立波命名为孤立子(soliton)。克鲁斯卡尔和扎布斯基的研究引起了物理学家和数学家的极大兴趣,从此,对于非线性方程的研究扩展到了物理学的各个领域,几十年来发展迅猛,发展了反散射方法、贝克隆(Bäcklund)变换、数值模拟等研究方法,取得了丰硕的成果。类似的方程还有伯格斯方程

$$u_t + uu_x - vu_{xx} = 0。\tag{4.2}$$

KdV-伯格斯方程

$$u_t + uu_x - vu_{xx} + \beta u_{xxx} = 0。\tag{4.3}$$

MKdV 方程

$$u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0。\tag{4.4}$$

2. 正弦戈登(sine-Gordon)方程

形式为

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0\tag{4.5}$$

的方程称为正弦戈登方程。这是量子场论中的更一般的克莱因—戈尔登(Klein-Gordon)方程的一个特殊情况：

$$u_{tt} - u_{xx} + V'(u) = 0。\tag{4.6}$$

正弦戈登方程在非线性光学、光纤通信、约瑟夫森(Josephson)结、晶体和相变等领域中都有广泛的应用。类似的方程还有双曲正弦戈登(sinh-Gordon)方程：

$$u_{tt} - u_{xx} + \sinh u = 0。\tag{4.7}$$

3. 非线性薛定谔(Schrödinger)方程

非线性薛定谔方程(NLS 方程)是一个重要的非线性演化方程，它可以用来描写短脉冲在单模光纤中的传播。

$$\mathrm{i}u_t + u_{xx} + \alpha |u|^2 u = 0。\tag{4.8}$$

§4.2 孤立子

1. KdV 方程

为了求 KdV 方程的行波解，设

$$u(x,t)=f(\xi),\ \xi=x-x_0-vt, \tag{4.9}$$

其中 v, x_0 都是常数。f 满足边界条件

$$f(\xi)\to 0,\ f'(\xi)\to 0,\ f''(\xi)\to 0\ (当\ |\xi|\to\infty\ 时)。\tag{4.10}$$

将上式代入 KdV 方程,即得

$$f'''(\xi)-6f(\xi)f'(\xi)-vf'(\xi)=0, \tag{4.11}$$

积分一次后得

$$f''(\xi)-3f^2(\xi)-vf(\xi)=0。\tag{4.12}$$

以上已经考虑了边界条件。两边乘 $f'(\xi)$,得

$$\begin{aligned}&f'(\xi)f''(\xi)-3f^2(\xi)f'(\xi)-vf(\xi)f'(\xi)=0\\ \to\ &f'(\xi)\mathrm{d}f'(\xi)-3f^2(\xi)\mathrm{d}f(\xi)-vf(\xi)\mathrm{d}f(\xi)=0,\end{aligned} \tag{4.13}$$

积分后得

$$\begin{aligned}&[f'(\xi)]^2-2f^3(\xi)-vf^2(\xi)=0\to[f'(\xi)]^2\\ &=2f^3(\xi)+vf^2(\xi)=2f^2(\xi)[f(\xi)+v/2]\geqslant 0。\end{aligned} \tag{4.14}$$

这是个椭圆方程,有如下的解(一般情况下的解是椭圆函数)

$$f(\xi)=-\frac{v}{2}\mathrm{sech}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}\xi\right)。\tag{4.15}$$

利用关系

$$\begin{aligned}f(\xi)+\frac{v}{2}&=\frac{v}{2}\left[1-\mathrm{sech}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}\xi\right)\right]=\frac{v}{2}\left[1-1/\cosh^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}\xi\right)\right]\\ &=\frac{v}{2}\tanh^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}\xi\right),\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}f'(\xi)&=-\frac{v}{2}\left[\cosh^{-2}\left(\frac{\sqrt{v}}{2}\xi\right)\right]'=v\frac{\sqrt{v}}{2}\cosh^{-3}\left(\frac{\sqrt{v}}{2}\xi\right)\sinh\left(\frac{\sqrt{v}}{2}\xi\right)\\ &=\frac{v\sqrt{v}}{2}\mathrm{sech}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}\xi\right)\tanh\left(\frac{\sqrt{v}}{2}\xi\right),\end{aligned} \tag{4.17}$$

即可证明这是 KdV 方程的解。最后得

$$u(x, t) = -\frac{v}{2}\operatorname{sech}^2\left[\frac{\sqrt{v}}{2}(x - x_0 - vt)\right]。\tag{4.18}$$

由于只有当宗量几乎为零的时候，双曲余割的值才显著地不为零，所以上式对固定的 t，只有在 $x \approx x_0 + vt$ 时才显著地不为零，是一个仅仅在小范围内下凹的曲线。当时间 t 变化时，可以看到这个下凹以速度 v 向右运动，在运动过程中，曲线的形状保持不变，这个解因而被称为孤立子。KdV 方程的双孤立子解的形状可见图 4.1。

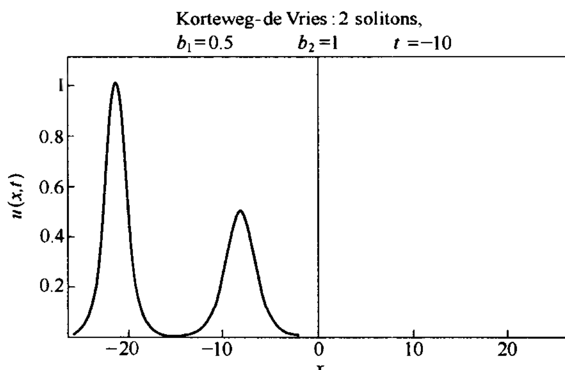


图 4.1

KdV 方程的双孤立子解的形式为

$$u(x, t) = -\frac{1}{2}(v_1 - v_2)$$

$$\cdot\frac{v_1\operatorname{csch}^2\left[\frac{\sqrt{v_1}}{2}(x - x_1 - v_1 t)\right] + v_2\operatorname{sech}^2\left[\frac{\sqrt{v_2}}{2}(x - x_2 - v_2 t)\right]}{\left\{\sqrt{v_1}\coth\left[\frac{\sqrt{v_1}}{2}(x - x_1 - v_1 t)\right] - \sqrt{v_2}\tanh\left[\frac{\sqrt{v_2}}{2}(x - x_2 - v_2 t)\right]\right\}^2},\tag{4.19}$$

KdV 方程还可以有 N 孤立子解。形式上可以写成

$$u_N(x,\ t) = -2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\ln\det(I+B), \tag{4.20}$$

其中

$$B_{ij} = \frac{\sqrt{c_i c_j}}{\sqrt{v_i}+\sqrt{v_j}}\exp\left[-\frac{\sqrt{v_i}}{2}(x-x_i-v_i t)-\frac{\sqrt{v_j}}{2}(x-x_j-v_j t)\right] \tag{4.21}$$

是 $N\times N$ 矩阵，c_i 是常数。$i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ N$。

2. 正弦戈登方程

为了求孤立子解，我们仍设

$$u(x,\ t)=u(\xi),\ \xi = x-x_0-vt, \tag{4.22}$$

$$u_{\xi\xi}(v^2-1)+\sin u = 0 \rightarrow u_{\xi\xi}+\frac{1}{v^2-1}\sin u = 0。 \tag{4.23}$$

两边乘 u_ξ，得

$$u_\xi u_{\xi\xi}+\frac{1}{v^2-1}\sin u u_\xi = u_\xi \mathrm{d}u_\xi+\frac{1}{v^2-1}\sin u\mathrm{d}u = 0。 \tag{4.24}$$

积分后得

$$\frac{1}{2}u_\xi^2+\frac{1}{v^2-1}(1-\cos u) = \frac{1}{2}u_\xi^2+\frac{2}{v^2-1}\sin^2\frac{u}{2} = H, \tag{4.25}$$

其中 H 为积分常数。如果 $v^2>1$，则可令

$$H = \frac{2k^2}{v^2-1}>0。 \tag{4.26}$$

方程(4.25)化为

$$u_\xi^2 = \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 = \frac{4}{v^2-1}\left(k^2-\sin^2\frac{u}{2}\right)。 \tag{4.27}$$

当 $k\to 1$ 时有孤立子解

$$u=-\pi+4\tan^{-1}\left[\exp\left(\pm\frac{x-x_0-vt}{\sqrt{v^2-1}}\right)\right], \tag{4.28}$$

也称为纽折解。取+号为纽折解,取−号为反纽折解。利用三角函数关系

$$\begin{aligned}\tan(u/4+\pi/4)&=\frac{1+\tan(u/4)}{1-\tan(u/4)}=\frac{[1+\tan(u/4)]^2}{1-\tan^2(u/4)}\\&=\frac{1+\sin(u/2)}{\cos(u/2)}=\sqrt{\frac{1+\sin(u/2)}{1-\sin(u/2)}},\end{aligned} \tag{4.29}$$

另一方面,由纽折解的表达式可得

$$\exp\left(\pm\frac{x-x_0-vt}{\sqrt{v^2-1}}\right)=\tan\left(\frac{u}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{\frac{1+\sin(u/2)}{1-\sin(u/2)}}。 \tag{4.30}$$

由此可得

$$\exp\left(\pm 2\frac{x-x_0-vt}{\sqrt{v^2-1}}\right)=\frac{1+\sin(u/2)}{1-\sin(u/2)}=\frac{2}{1-\sin(u/2)}-1。 \tag{4.31}$$

对 u 微分后得

$$\begin{aligned}u_\xi^2&=\left[\frac{4}{1+\exp\left(\pm 2\frac{x-x_0-vt}{\sqrt{v^2-1}}\right)}\exp\left(\pm\frac{x-x_0-vt}{\sqrt{v^2-1}}\right)\frac{1}{\sqrt{v^2-1}}\right]^2\\&=\frac{16}{v^2-1}\left[\frac{1}{1+\exp\left(\pm 2\frac{x-x_0-vt}{\sqrt{v^2-1}}\right)}-\frac{1}{\left[1+\exp\left(\pm 2\frac{x-x_0-vt}{\sqrt{v^2-1}}\right)\right]^2}\right]\\&=\frac{16}{v^2-1}\left[\frac{1}{2}\left(1-\sin\frac{u}{2}\right)-\frac{1}{4}\left(1-\sin\frac{u}{2}\right)^2\right]\\&=\frac{4}{v^2-1}\left(1-\sin^2\frac{u}{2}\right)。\end{aligned} \tag{4.32}$$

如果 $v^2<1$，则可令

$$H=-\frac{2k^2}{1-v^2}<0, \tag{4.33}$$

$$u_\xi^2=\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2=\frac{4}{1-v^2}\left(\sin^2\frac{u}{2}-k^2\right)。 \tag{4.34}$$

当 $k\to 0$ 时有孤立子解

$$u=4\tan^{-1}\left[\exp\left(\pm\frac{x-x_0-vt}{\sqrt{1-v^2}}\right)\right]。 \tag{4.35}$$

也称为纽折解。取+号为纽折解，取−号为反纽折解。利用三角函数关系可得

$$\begin{aligned}\tan\frac{u}{4}&=\frac{\sin(u/4)}{\cos(u/4)}=\frac{2\cos(u/4)\sin(u/4)}{2\cos^2(u/4)}\\&=\frac{\sin(u/2)}{1+\cos(u/2)}=\sqrt{\frac{1-\cos(u/2)}{1+\cos(u/2)}},\end{aligned} \tag{4.36}$$

由解可得

$$\exp\left(\pm\frac{x-x_0-vt}{\sqrt{1-v^2}}\right)=\tan\frac{u}{4}=\sqrt{\frac{1-\cos(u/2)}{1+\cos(u/2)}}。 \tag{4.37}$$

由此可得

$$\exp\left(\pm 2\frac{x-x_0-vt}{\sqrt{1-v^2}}\right)=\frac{1-\cos(u/2)}{1+\cos(u/2)}=\frac{2}{1+\cos(u/2)}-1, \tag{4.38}$$

对 u 微分后得

$$\begin{aligned}u_\xi^2&=\left[\frac{4}{1+\exp\left(\pm 2\frac{x-x_0-vt}{\sqrt{1-v^2}}\right)}\exp\left(\pm\frac{x-x_0-vt}{\sqrt{1-v^2}}\right)\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\right]^2\\&=\frac{16}{1-v^2}\left[\frac{1}{1+\exp\left(\pm 2\frac{x-x_0-vt}{\sqrt{1-v^2}}\right)}-\frac{1}{\left[1+\exp\left(\pm 2\frac{x-x_0-vt}{\sqrt{1-v^2}}\right)\right]^2}\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{16}{1-v^2}\left[\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{u}{2}\right)-\frac{1}{4}\left(1+\cos\frac{u}{2}\right)^2\right]$$

$$= \frac{4}{1-v^2}\left[1-\cos^2\frac{u}{2}\right]=\frac{4}{1-v^2}\sin^2\frac{u}{2}。\tag{4.39}$$

由此验证了纽折解。正弦戈登方程除了纽折解之外，还有一种所谓的呼吸子解。寻找方程下列形式的解

$$u = 4\tan^{-1}\left[\frac{X(x)}{T(t)}\right],\tag{4.40}$$

其中 $X(x)$，$T(t)$分别只是 x 和 t 的函数。注意到

$$u_x = \frac{4X'T}{X^2+T^2},\ u_t = -\frac{4XT'}{X^2+T^2},\tag{4.41}$$

$$u_{xx} = \frac{4T[(X^2+T^2)X''-2XX'^2]}{(X^2+T^2)^2},\tag{4.42}$$

$$u_{tt} = -\frac{4X[(X^2+T^2)T''-2TT'^2]}{(X^2+T^2)^2},\tag{4.43}$$

$$\sin u = \frac{4\tan(u/4)[1-\tan^2(u/4)]^2}{[1+\tan^2(u/4)]^2} = \frac{4XT(T^2-X^2)}{(T^2+X^2)^2},\tag{4.44}$$

代入方程后得

$$(X^2+T^2)\left(\frac{X''}{X}+\frac{T''}{T}\right)-2(X'^2+T'^2) = T^2-X^2,\tag{4.45}$$

分别对 x 和 t 微商，得

$$2XX'\left(\frac{X''}{X}+\frac{T''}{T}\right)+(X^2+T^2)\left(\frac{X''}{X}\right)'-4X'X'' = -2XX',$$

$$2TT'\left(\frac{X''}{X}+\frac{T''}{T}\right)+(X^2+T^2)\left(\frac{T''}{T}\right)'-4T'T'' = 2TT',$$

由此可以得到

$$\frac{1}{XX'}\left(\frac{X''}{X}\right)' = -\frac{1}{TT'}\left(\frac{T''}{T}\right)' = 4\alpha, \tag{4.46}$$

其中 4α 为分离变量常数。由此得到两个常微分方程

$$\left(\frac{X''}{X}\right)' = 4\alpha XX',\ \left(\frac{T''}{T}\right)' = -4\alpha TT', \tag{4.47}$$

积分后得

$$X'' = 2\alpha X^3 + \beta_1 X,\ T'' = -2\alpha T^3 + \beta_2 T, \tag{4.48}$$

分别乘 X', T' 后积分,得

$$X'^2 = \alpha X^4 + \beta_1 X^2 + \gamma_1,\ T'^2 = -\alpha T^4 + \beta_2 T^2 + \gamma_2。 \tag{4.49}$$

将(4.48)—(4.49)式代入方程(4.45),得

$$-[(\beta_1 - \beta_2) - 1](X^2 - T^2) = 2(\gamma_1 + \gamma_2)。 \tag{4.50}$$

由于 $X(x)$, $T(t)$分别只是 x 和 t 的函数,所以有

$$\beta_1 - \beta_2 = 1,\ \gamma_1 = -\gamma_2。 \tag{4.51}$$

因此有

$$X'^2 = \alpha X^4 + (1-\beta)X^2 + \gamma,\ T'^2 = -\alpha T^4 - \beta T^2 - \gamma。 \tag{4.52}$$

在 $\alpha = -1$, $\gamma = 0$ 的情况下,有如下的解:

$$X = \sqrt{1-\beta}\operatorname{sech}(\sqrt{1-\beta}x),\ \frac{1}{T} = \pm\frac{1}{\sqrt{\beta}}\sin\sqrt{\beta}t, \tag{4.53}$$

即

$$u = 4\tan^{-1}\left[\pm\sqrt{\frac{1-\beta}{\beta}}\frac{\sin\sqrt{\beta}t}{\cosh\sqrt{1-\beta}x}\right]。 \tag{4.54}$$

这是一个周期为 $2\pi/\sqrt{\beta}$的周期解,在 x 轴的上方和下方不断变化着,像是在呼吸一样,也像是由孤立子和反孤立子构成的一对振荡,所以称为呼吸子。呼吸子解是不传播的。

§4.3 反散射方法及一些变换法

1. 反散射方法

反散射方法是求解非线性方程的一种系统的方法。首先引入一对线性方程

$$\hat{L}\phi(x, t, E) = E\phi(x, t, E), \ \partial_t\phi(x, t, E) = \hat{M}\phi(x, t, E)。 \tag{4.55}$$

这里$\hat{L}$是一个线性算子，E 是相应的本征值，$\phi(x, t, E)$是本征函数，$\hat{M}$是另一个线性算子。如果这一对方程是相容的，且 E 与时间 t 无关，则有

$$\hat{L}_t + [\hat{L}, \hat{M}] = 0, \tag{4.56}$$

其中

$$[\hat{L}, \hat{M}] = \hat{L}\hat{M} - \hat{M}\hat{L}。 \tag{4.57}$$

现在选取

$$\hat{L} = -\partial_{xx} + u(x, t), \ \hat{M} = -4\partial_{xxx} + 6u(x, t)\partial_x + 3u_x(x, t) \tag{4.58}$$

(称为 KdV 方程的 Lax 对)，则由上述方程就得到 KdV 方程。而本征值方程可写成

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + E - u(x, t)\right]\phi = 0。 \tag{4.59}$$

这是一维的薛定谔方程，E 是能量，$u(x, t)$是势能。这个方程也可以看成是变换

$$u = \frac{1}{\phi}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + E, \tag{4.60}$$

称为 GGKM (Gardner-Greene-Kruskal-Miura)变换。

通常给定势，在一定的边界条件下求本征值 E 和本征函数

$\phi(x, E)$，称为正散射问题。在研究核物理问题时，产生了需要从本征值 E 和本征函数 $\phi(x, E)$ 去求势 $u(x, t)$ 的反散射问题。在非线性方程的求解问题上，反散射方法起了十分重要的作用。这里将只做简单介绍。

对于 KdV 方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \\ u\,|_{t=0} = u_0(x), \end{cases} \tag{4.61}$$

其中 $u_0(x)$ 是已知函数。用反散射方法求解的过程可以分为三步。

(1) 以 $u_0(x)$ 为势能，解下列薛定谔方程的本征值问题，求出与 $u_0(x)$ 相应的本征值 E（记为 E_0）和本征函数 ϕ（记为 ϕ_0），即求解

$$\begin{cases} \left[\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + E_0 - u_0(x, t)\right]\phi_0 = 0, \\ \phi_0\,|_{x\to\pm\infty} = 0。 \end{cases} \tag{4.62}$$

根据量子力学，上述问题的本征值包括分立谱（束缚态）和连续谱（散射态），对束缚态，有

$$E_0 = -k_n^2 \quad (k_n > 0,\ n = 1,\ 2,\ \cdots,\ N), \tag{4.63}$$

相应的本征函数有如下的渐进式

$$\phi_0 \to c_n(0)e^{k_n x} \quad (x \to -\infty),\ \phi_0 \to c_n(0)e^{-k_n x} \quad (x \to \infty)。 \tag{4.64}$$

对于散射态，有

$$E_0 = k^2, \tag{4.65}$$

相应的本征函数的渐进式为

$$\phi_0 \to a(k, 0)e^{ikx} \quad (x \to -\infty),\ \phi_0 \to e^{-ikx} + b(k, 0)e^{ikx} \quad (x \to \infty)。 \tag{4.66}$$

上面各式中的 $c_n(0)$，$a(k, 0)$，$b(k, 0)$ 都称为是初始时刻的散射数据。

（2）将 GGKM 变换代入 KdV 方程，确定散射数据的时间演化规律。

这些规律可以证明是

$$c_n(t) = c_n(0)e^{4k_n^3 t},$$
$$a(k,\ t) = a(k,\ 0),\ b(k,\ t) = b(k,\ 0)e^{8ik^3 t}。\tag{4.67}$$

（3）确定 KdV 方程初值问题的解，可以证明这个解可以表示为

$$u(x,\ t) = -2\frac{\partial}{\partial x}K(x,\ x,\ t),\tag{4.68}$$

其中 $K(x,\ x,\ t)$ 是 GLM(Gelfand-Levitan-Marchenko)积分方程

$$K(x,\ y,\ t) + B(x+y,\ t) + \int_x^{+\infty} B(y+z,\ t)K(x,\ z,\ t)\mathrm{d}z$$
$$= 0\ (y > x)\tag{4.69}$$

的解。而积分方程的核为

$$B(x,\ t) - \sum_{n=1}^{N} c_n^2(t)e^{-k_n t} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} b(k,\ t)e^{ikx}\mathrm{d}x。\tag{4.70}$$

实际应用反散射方法求解的过程还是相当繁复的，可以参见有关著作。

2. 相似变换

在一个非线性方程中作变换

$$x \to x' = \lambda^{\alpha_1}x,\ t \to t' = \lambda^{\alpha_2}t,\ u \to u' = \lambda^{\alpha_3}u,\tag{4.71}$$

并要求 $u'(x',\ t')$ 满足相同的方程，这样的变换称为相似变换。通常的相似变换形式为

$$\xi = xt^m,\ v(\xi) = ut^n,\tag{4.72}$$

在变换中要求

$$xt^m = x't'^m,\ ut^n = u't'^n, \tag{4.73}$$

由此可以确定变换的参数。代入原方程后可以得到 $v(\xi)$ 满足的常微分方程。如果能求出这个方程的解，就得到了原方程的解

$$u(x,\ t) = t^{-n}v(xt^m), \tag{4.74}$$

这个解称为自相似解。如对 KdV 方程

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{4.75}$$

作变换

$$x' = \lambda^{\alpha_1}x,\ t' = \lambda^{\alpha_2}t,\ u' = \lambda^{\alpha_3}u, \tag{4.76}$$

则方程化为

$$\lambda^{\alpha_2-\alpha_3}\left(\frac{\partial u'}{\partial t'}\right) - 6\lambda^{\alpha_1-2\alpha_3}\left(u'\frac{\partial u'}{\partial x'}\right) + \lambda^{3\alpha_1-\alpha_3}\left(\frac{\partial^3 u'}{\partial x'^3}\right) = 0。 \tag{4.77}$$

要求方程形式不变可以得到

$$\alpha_2 - \alpha_3 = \alpha_1 - 2\alpha_3 = 3\alpha_1 - \alpha_3。 \tag{4.78}$$

因而

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2}\alpha_3 = -\frac{1}{2}\ (\text{取}\ \alpha_3 = 1),\ \alpha_2 = -\frac{3}{2}\alpha_3 = -\frac{3}{2}。 \tag{4.79}$$

因此变换式为

$$x' = \lambda^{-1/2}x,\ t' = \lambda^{-3/2}t,\ u' = \lambda u。 \tag{4.80}$$

由

$$xt^m = x't'^m,\ ut^n = u't'^n, \tag{4.81}$$

得到

$$m = -1/3,\ n = 2/3。 \tag{4.82}$$

因此，KdV 方程的相似变换为

$$\xi = (3t)^{-1/3}x,\ v = (3t)^{2/3}u。 \tag{4.83}$$

将此变换代入 KdV 方程后得

$$\frac{d^3 v}{d\xi^3} - 6v\frac{dv}{d\xi} - \xi\frac{dv}{d\xi} - 2v = 0。\tag{4.84}$$

这是一个常微分方程，如果能找到一个解 $f(\xi)$，则 KdV 方程的自相似解可以写成

$$u(x, t) = (3t)^{-2/3} f[(3t)^{-1/3}x]。\tag{4.85}$$

3. 霍普夫—科尔(Hopf-Cole)变换

变换

$$u = -2\beta\frac{\partial \ln v}{\partial x}\tag{4.86}$$

称为霍普夫—科尔变换，对伯格斯方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\ (\beta > 0)。\tag{4.87}$$

霍普夫—科尔变换将其变换为 v 的线性耗散方程

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \beta\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}。\tag{4.88}$$

因此，可以根据 v 的解得到 u 的解。比如，由 v 的解

$$v = 1 + e^{kx-\omega t}\quad (k^2 = -\omega/\beta)\tag{4.89}$$

可以得到

$$u = -2\beta\frac{\partial}{\partial x}\ln[1 + e^{kx-\omega t}] = \frac{\omega}{k}\left[1 - \tanh\frac{kx-\omega t}{2}\right],\tag{4.90}$$

这是伯格斯方程的冲击波解。对于 KdV 方程，可以通过广义霍普夫—科尔变换

$$u = -2\frac{\partial^2 \ln v}{\partial x^2},\tag{4.91}$$

将其变换为

$$v\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)-\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)+3\left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right]=0。\tag{4.92}$$

取

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}=0,\ \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}=0,\tag{4.93}$$

从第二个方程可以得到

$$v''^2=v'v'''\to\frac{v'''}{v''}=\frac{v''}{v'}\to\frac{\mathrm{d}v''}{v''}=\frac{\mathrm{d}v'}{v'},\tag{4.94}$$

积分后得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\alpha\frac{\partial v}{\partial x}\quad(\alpha\ 常数)。\tag{4.95}$$

由此得到了两个线性方程。同时满足这两个线性方程的解不难找到

$$v=1+\mathrm{e}^{2(kx-\omega t)}\quad(\omega=4k^3,\ \alpha=2k)。\tag{4.96}$$

代入变换式即得

$$u=-2\frac{\partial^2\ln v}{\partial x^2}=-2k^2\operatorname{sech}^2(kx-4k^3t),\tag{4.97}$$

这就是前面的单孤立子解。类似地可以得到 KdV 方程的其他类型的解。

4. 贝克隆变换

非线性方程的求解是很困难的。贝克隆变换是建立一个非线性偏微分方程的解与另一个已知的线性偏微分方程解之间的关系,或者是建立一个非线性偏微分方程两个不同解之间的关系。这样,我们就可以根据已知线性偏微分方程的解去求非线性偏微分方程的解,或者根据非线性偏微分方程的一个解去找别的解。每个非线性方程,都可以找到相应的贝克隆变换。将正弦戈登方程写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = \sin u。\tag{4.98}$$

设 $u(\xi, \eta)$和 $u_0(\xi, \eta)$都是正弦戈登方程的解，即有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = \sin u,\ \frac{\partial^2 u_0}{\partial\xi\partial\eta} = \sin u_0。\tag{4.99}$$

把这两个方程分别相加、相减，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}(u+u_0) &= \sin u + \sin u_0 = 2\sin\frac{u+u_0}{2}\cos\frac{u-u_0}{2},\\ \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}(u-u_0) &= \sin u - \sin u_0 = 2\cos\frac{u+u_0}{2}\sin\frac{u-u_0}{2}。\end{aligned}\tag{4.100}$$

由此可以得到正弦戈登方程的贝克隆变换

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial\xi} &= \frac{\partial u_0}{\partial\xi} + 2a\sin\frac{u+u_0}{2},\\ \frac{\partial u}{\partial\eta} &= -\frac{\partial u_0}{\partial\eta} + \frac{2}{a}\sin\frac{u-u_0}{2},\end{aligned}\tag{4.101}$$

其中 a 为任意非零常数。有了贝克隆变换，就可以根据正弦戈登方程的一个解去寻找它的另一个解。比如，$u_0 = 0$ 是正弦戈登方程的一个解，由贝克隆变换得

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial\xi} &= 2a\sin\frac{u}{2},\\ \frac{\partial u}{\partial\eta} &= \frac{2}{a}\sin\frac{u}{2},\end{aligned}\tag{4.102}$$

分别对 ξ 和 η 积分后得

$$\begin{aligned}\ln\tan\frac{u}{4} &= a\xi + G(\eta),\\ \ln\tan\frac{u}{4} &= \frac{\eta}{a} + F(\xi)。\end{aligned}\tag{4.103}$$

$F(\xi)$和$G(\eta)$是任意函数。两式比较后得

$$F(\xi) - a\xi = G(\eta) - \eta/a, \tag{4.104}$$

左边是ξ的函数,右边是η的函数,两边相等只能是常数,令其为δ,得

$$F(\xi) = a\xi + \delta,\ G(\eta) = \eta/a + \delta, \tag{4.105}$$

即

$$\ln\tan\frac{u}{4} = a\xi + \frac{\eta}{a} + \delta \rightarrow \tan\frac{u}{4} = \exp\left[a\xi + \frac{\eta}{a} + \delta\right]。 \tag{4.106}$$

这就是前面得到的纽折解或反纽折解。类似地可以得到其他各种不同的解。如果反复利用贝克隆变换公式,从

$$u_0 \rightarrow u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow u_3, \tag{4.107}$$

可以得到正弦戈登方程解的叠加公式

$$\tan\frac{u_3 - u_0}{4} = \frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2}\tan\frac{u_1 - u_2}{4}。 \tag{4.108}$$

由这个公式,可以用代数方法从u_0,u_1,u_2找到正弦戈登方程的一个新解u_3。若取

$$u_0 = 0,\ \tan\frac{u_1}{4} = e^{k(x-ct)},\ \tan\frac{u_2}{4} = e^{k(x+ct)}, \tag{4.109}$$

其中u_1是以速度c沿x方向前进的纽折波,u_2是以速度c沿x反方向前进的反纽折波。取常数

$$a_1 = \sqrt{\frac{1+c}{1-c}},\ a_2 = \sqrt{\frac{1-c}{1+c}}, \tag{4.110}$$

便得

$$\tan\frac{u^3}{4} = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\sinh(kct)}{\cosh(kx)}。 \tag{4.111}$$

这是正弦戈登方程的双纽折孤立子解。其他非线性方程也有相应

的贝克隆变换和类似的叠加公式，这儿不再赘述。有兴趣的读者可以参见有关著作。

§4.4 非线性薛定谔方程

1. 1+1 维情形

非线性薛定谔方程(4.8)式是一类重要的非线性偏微分方程，其中 u 代表几乎是单色的波列的振幅。(4.8)式是复方程，$|u|^2$ 为波列包络幅度的平方，其形状为钟形。(4.8)式具有哈密顿结构，即可写成

$$\mathrm{i}\,\bar{u}_t = \bar{u}_{xx} + 2\,\bar{u}^2 u, \tag{4.112}$$

$$-\mathrm{i}u_t = u_{xx} + 2u^2\,\bar{u}, \tag{4.113}$$

由(4.112)和(4.113)式，得到正则关系

$$\begin{cases} \bar{u}_t = \dfrac{\delta H}{\delta u}, \\ u_t = -\dfrac{\delta H}{\delta \bar{u}}。\end{cases} \tag{4.114}$$

H 是一个泛函，可写作

$$H = \int_{x_1}^{x_2} h[x,\ u,\ u_x]\mathrm{d}x。 \tag{4.115}$$

求 H 的变分

$$\delta H = \int_{x_1}^{x_2} h[x,\ u+\delta u,\ (u+\delta u)_x]\mathrm{d}x - \int_{x_1}^{x_2} h[x,\ u,\ u_x]\mathrm{d}x。 \tag{4.116}$$

设变分 δu 在 x_1，x_2 处为零，展开上式到一阶项，可得

$$\delta H = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial h}{\partial u}\delta u + \frac{\partial h}{\partial u_x}\,\frac{\mathrm{d}(\delta u)}{\mathrm{d}x}\right]\mathrm{d}x。 \tag{4.117}$$

利用分部积分方法，上式可写成

$$\delta H = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial h}{\partial u} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial h}{\partial u_x} \right) \right] \delta u \mathrm{d}x。 \tag{4.118}$$

由此导出变分导数

$$\frac{\delta H}{\delta u} = \frac{\partial h}{\partial u} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial h}{\partial u_x} \right)。 \tag{4.119}$$

利用(4.114)和(4.112)式，有

$$\bar{u}_t = \frac{\delta H}{\delta u} = - \mathrm{i}\, \bar{u}_{xx} - 2\mathrm{i}\, \bar{u}^2 u, \tag{4.120}$$

所以，容易导出

$$h = - \mathrm{i}(\bar{u}^2 u^2 - \bar{u}_x u_x)。 \tag{4.121}$$

哈密顿量可以写成

$$H = - \mathrm{i} \int_{x_1}^{x_2} (\bar{u}^2 u^2 - \bar{u}_x u_x) \mathrm{d}x。 \tag{4.122}$$

2. 高维情形

当空间为二维时，非线性薛定谔方程可写为

$$\mathrm{i}\, \bar{u}_t + \Delta_2\, \bar{u} + \bar{u} \mid u \mid^2 = 0, \tag{4.123}$$

其中 Δ_2 是二维拉普拉斯算子，它不能用反散射方法求解。但该方程具有一种被称作“自聚焦”的奇异性。一般来说，这种奇异性可以在对称坐标下进行研究。

$$\mathrm{i}\, \bar{u}_t + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\, \bar{u}_r) + \bar{u} \mid u \mid^2 = 0,\ \bar{u} = \bar{u}(r,\ t)。 \tag{4.124}$$

扎哈罗夫(Zakharov)发现，选取适当的初始条件 $\bar{u}(r,\ 0)$，在能量小于零时，会形成坍缩(或爆发)。这种现象能推广到更一般的方程

$$\mathrm{i}\, \bar{u}_t + \Delta_d\, \bar{u} + \bar{u} \mid u \mid^{2\sigma} = 0, \tag{4.125}$$

其中 Δ_d 是 d 维拉普拉斯算子，σ 是非线性阶数，对于每一个 d 都能找到一个自聚焦奇异性的 σ。特别在 $d = 1$ 的情形，当 $\sigma = 4$ 时

发生自聚焦奇异性。

§4.5 自治系统

1. 基本概念

设 $\boldsymbol{f}(t)$是自变量为 t,在 R^n 中取值的矢量函数,$f_i(t)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 是它的分量,即 $\tilde{\boldsymbol{f}}=(f_1, f_2, \cdots, f_n)$。显然有下述结论:

(1) $\boldsymbol{f}(t)$连续当且仅当 $f_i(t)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 都连续,

(2) $\boldsymbol{f}(t)$的导数是矢量函数,记作 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}/\mathrm{d}t$ 或$\dot{\boldsymbol{f}}$,且有 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}/\mathrm{d}t=(\dot{f}_1, \dot{f}_2, \cdots, \dot{f}_n)$,

(3) $\boldsymbol{f}(t)$在区间$[t_0, t]$上的积分$\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(\tau)\mathrm{d}\tau$ 是矢量函数 $\boldsymbol{g}(t)$,且有

$$\tilde{\boldsymbol{g}}=\int_{t_0}^{t}\tilde{\boldsymbol{f}}(\tau)\mathrm{d}\tau=\left(\int_{t_0}^{t}f_1(\tau)\mathrm{d}\tau, \int_{t_0}^{t}f_2(\tau)\mathrm{d}\tau, \cdots, \int_{t_0}^{t}f_n(\tau)\mathrm{d}\tau\right),$$

(4) 由施瓦兹(Schwartz)不等式,不难证明

$$\left|\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(\tau)\mathrm{d}\tau\right|\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}|\boldsymbol{f}(\tau)|\mathrm{d}\tau\right|。\tag{4.126}$$

下面考虑自变量为 $\boldsymbol{x}R^n$ 中的矢量,且取值也在 R^n 中的矢量函数 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$,即

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}h_1(\boldsymbol{x})\\h_2(\boldsymbol{x})\\\vdots\\h_n(\boldsymbol{x})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}h_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)\\h_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)\\\vdots\\h_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)\end{bmatrix}。\tag{4.127}$$

矢量函数 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$连续,即$h_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)(i=1, 2, \cdots, n)$作为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数都连续。如果存在一个常数 L,使得 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in D$时,有

$$|\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{y})|\leqslant L|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|,\tag{4.128}$$

则称 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ 在 R^n 中 D 区域上是利普希茨的，其中 L 称为 $\boldsymbol{h}$ 在 D 上的利普希茨常数。如果矢量函数在某凸集 D 上满足

$$\left|\frac{\partial h_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_j}\right| \leqslant \kappa \ (i, j = 1, 2, \cdots, n), \qquad (4.129)$$

κ 是常数，则 $\boldsymbol{h}$ 在 D 上是利普希茨的。因为对于 $\boldsymbol{h}$ 的第 i 个分量有下述不等式

$$|h_i(\boldsymbol{x}) - h_i(\boldsymbol{y})| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial h_i(\boldsymbol{x} + \theta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}))}{\partial x_j}\right| |x_i - y_i| \ (0 < \theta < 1)。 \qquad (4.130)$$

因为 D 有凸性，所以当 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D$ 时，$\boldsymbol{x} + \theta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$ 在 D 内，所以

$$|h_i(\boldsymbol{x}) - h_i(\boldsymbol{y})| \leqslant nK |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|。 \qquad (4.131)$$

再由 R^n 空间模的定义

$$|\boldsymbol{x}| = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (4.132)$$

可得 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D$ 时，

$$|\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{y})| \leqslant n^{3/2} K |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|, \qquad (4.133)$$

所以 $\boldsymbol{h}$ 在 D 上是利普希茨的。

如果对于 R^n 中某区域 D 的每一点，存在该点的一个邻域 $D_0 \in D$，使得 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ 在 D_0 上是利普希茨的，则称 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ 在 D 上是局部利普希茨的。容易证明，$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ 在 D 上有 $\partial h_i/\partial x_j (i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 都连续，则 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ 在 D 上局部利普希茨，同时，还可以证明，当 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ 在区域 D 上局部利普希茨，W 是 D 内的有界闭区域，则 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ 在 W 上是利普希茨的。

2. 解的存在性与唯一性

下面我们讨论常微分方程解的存在性与唯一性。考虑常微分方程的柯西问题

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0。\end{cases} \tag{4.134}$$

定理 1 若 $f(t, x)$在开域 $D \subseteq R \times R^n$ 内连续并满足局部利普希茨条件,则柯西问题(4.134)存在唯一的解。

证明 由于 f 满足局部利普希茨条件,则对于点 $P_0(t_0, \boldsymbol{x}_0) \in D$,一定存在

$$D_0 = \{(t, \boldsymbol{x}) \Big| \mid t - t_0 \mid \leqslant a, \mid \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \mid \leqslant b\} \subset D \tag{4.135}$$

以及依赖于 P_0 点的常数 L_{P_0},使任意的 $(t, \boldsymbol{x}_1)$, $(t, \boldsymbol{x}_2) \in D_0$ 有不等式

$$\mid \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_2) \mid \leqslant L_{P_0} \mid \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \mid。 \tag{4.136}$$

定义 $M = \max\limits_{(t, x) \in G_0} \mid \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \mid$, $h = \min(a, b/M)$ 以及

$$0 < h^* < \min(h, 1/L_{P_0}), \tag{4.137}$$

则在区间 $\mid t - t_0 \mid \leqslant h^*$ 上的柯西问题等价于积分方程

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{x}(\tau)) \mathrm{d}\tau, \mid t - t_0 \mid \leqslant h^* \tag{4.138}$$

的求解问题。取 B 为定义在区间 $\mid t - t_0 \mid \leqslant h^*$ 上的一切连续函数所构成的空间,G 为定义在区间 $\mid t - t_0 \mid \leqslant h^*$ 上且值域包含在 D_0 中的一切连续函数所构成的集合。现定义在连续函数空间 $C[t_0 - h^*, t_0 + h^*]$ 的映射

$$(T\boldsymbol{x})(t) = \boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{x}(\tau)) \mathrm{d}\tau, \mid t - t_0 \mid \leqslant h^*, \tag{4.139}$$

因为

$$\mid T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \mid \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \mid \boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{x}(\tau)) \mid \mathrm{d}\tau \right| \leqslant M \mid t - t_0 \mid \leqslant b, \tag{4.140}$$

所以 T 将集合 G 映射到自身。要证明积分方程存在唯一解,即要证明 T 存在唯一的不动点:$\boldsymbol{x}^* = T\boldsymbol{x}^*$,这可以利用巴拿赫空间的

压缩映像原理来证明。设任意的 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in G$，则有

$$\begin{aligned}
|T\boldsymbol{x}_1 - T\boldsymbol{x}_2|_c &= \max_{|t-t_0|\leqslant h^*}\left|\int_{t_0}^{t}[\boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{x}_1(\tau)) - \boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{x}_2(\tau))]\mathrm{d}\tau\right| \\
&\leqslant \max_{|t-t_0|\leqslant h^*}\left|\int_{t_0}^{t}|\boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{x}_1(\tau)) - \boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{x}_2(\tau))|\mathrm{d}\tau\right|。
\end{aligned} \tag{4.141}$$

由局部利普希茨条件，有

$$\begin{aligned}
|T\boldsymbol{x}_1 - T\boldsymbol{x}_2|_c &\leqslant \max_{|t-t_0|\leqslant h^*}\left|\int_{t_0}^{t}L_{P_0}|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|_c\mathrm{d}\tau\right| \\
&\leqslant L_{P_0}\max_{|t-t_0|\leqslant h^*}|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|_c|t - t_0| \\
&\leqslant L_{P_0}h^*|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|_c,
\end{aligned} \tag{4.142}$$

再因为 $L_{P_0}h^* < 1$，所以 T 是一压缩映射，即存在唯一的不动点，证毕。

值得指出的是，仅有 $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$在 D 内连续的条件，就足以保证解的存在性，但不能保证唯一性，而局部利普希茨条件保证解至多存在一个，却不能保证其存在性。

3. 解的延拓

由定理 1 可知柯西问题的解，至少在区间 $|t-t_0|\leqslant h^*$ 上唯一存在。将解向右延拓，令 $t_1 = t_0 + h^*$，$\boldsymbol{x}(t_0 + h^*) = \boldsymbol{x}_1$，则 $P_1(t_0+h^*, \boldsymbol{x}(t_0+h^*)) \in D_0 \subset D$。由于 P_1 是 D 的内点，所以必定存在闭区域

$$D_1 = \{(t, \boldsymbol{x}) \mid |t-t_1|\leqslant a_1, |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1|\leqslant b\} \subset G, \tag{4.143}$$

使 $\boldsymbol{f}$ 在 D_1 上对 $\boldsymbol{x}$ 满足利普希茨条件，再利用定理 1，此方程过点 P_1 的解记作 $\boldsymbol{x}_1(t)$，它将在区间 $|t-t_0|\leqslant h^*$ 上存在唯一，其中 h_1^* 可类似于定理 1 证明中 h^* 的定义。据解的唯一性可知，在区

间$[t_1-h_1^*, t_1]$上，该方程过 P_1 的解 $\boldsymbol{x}_1(t)$必定与过 P_0 的解重合。利用上述方法可再向右延拓，同样，还可从点 $(t_0-h^*, \boldsymbol{x}(t_0-h^*))$ 向左延拓。向左、右双向的延拓，直到双方都不能延拓时为止，这时的解称为饱和解，它存在于最大存在空间。

4. 相流

在经典力学中，过程是确定的，即它的整个未来和过去的历程能由它现在的状态唯一确定，而一个过程的所有可能状态的集合就是相空间。如果过程是可微的，那么它的相空间具有微分流形的结构并且状态随时间的演化是用可微函数来描述的。确定过程的数学模型是相流(phase flows)。设 x 是初始状态，相空间为 M，又设 $g^t x$ 表示初始状态演化到 t 时刻的状态的演化映射

$$g^t: M \to M, \tag{4.144}$$

它将每一 $x \in M$ 映射到新的状态 $g^t x \in M$，且有

$$g^{t+s} = g^t g^s, \tag{4.145}$$

所以，由集合 M 和由 M 变到它自身的单参数变换群$\{g^t\}$所组成的$(M, \{g^t\})$对称为相流。

设 $x \in M$ 是相空间中的任一相点，考虑实直线到相空间的映射

$$\varphi: \mathbf{R} \to M,\ \varphi(t) = g^t x, \tag{4.146}$$

φ 称为相流$(M, \{g^t\})$作用下点 x 的运动。在映射 φ 下 $\mathbf{R}$ 的像称为相流$(M, \{g^t\})$的相曲线。所谓临界点 $x \in M$ 是一个相点同时又是一条相曲线

$$g^t x = x,\ \forall t \in \mathbf{R}。 \tag{4.147}$$

所谓相流$(M, \{g^t\})$的扩充相空间(extended phase space)是指实 t 轴和相空间 M 的直积 $\mathbf{R}\times M$。映射 φ 的图形称为相流$(M, \{g^t\})$的积分曲线。

过程的有限维和可微性概念需要相空间是有限维的微分流

形 M 和相流是 M 上的单参数微分同胚群(one-parameter group of diffeomorphisms)。所谓微分同胚 $f:U\to V$,是一个 1-1 的映射,且 f 和 $f^{-1}:V\to U$ 都是可微映射。所谓流形 M 上的单参数微分同胚群 $\{g^t\}$,指的是直积 $\mathbf{R}\times M$ (扩充相空间)到 M(相空间)的映射

$$g:\mathbf{R}\times M\to M,\ g(t,\ x)=g^t x,\ t\in\mathbf{R},\ \boldsymbol{x}\in M, \tag{4.148}$$

且满足下述三个条件

1) g 是可微映射,

2) 对于每个 $t\in\mathbf{R}$,映射 $g^t:M\to M$ 是微分同胚,

3) $\{g^t,\ t\in\mathbf{R}\}$ 是 M 的单参数变换群。

下面引进相速度的概念,相速度 $\boldsymbol{f}(x)$ 是表示相点运动速度的矢量,即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} g^t x=\boldsymbol{f}(x)。\tag{4.149}$$

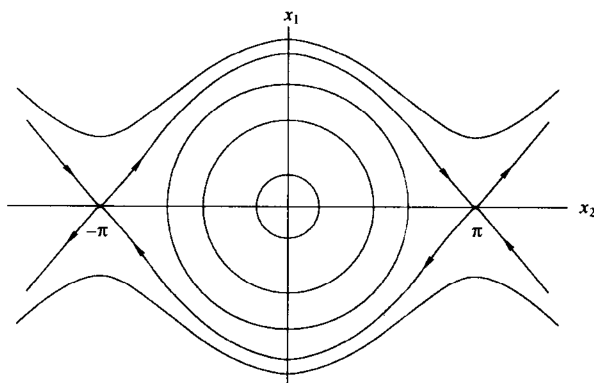


图 4.2

单摆振动方程

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=-k\sin x_1,\end{cases} \tag{4.150}$$

在具有坐标 x_1,x_2 的相平面内对应的矢量场为

$$f_1 = x_2, \ f_2 = -k\sin x_1, \tag{4.151}$$

且在 $x_1 = m\pi$, $x_2 = 0$ 时 $f_1 = f_2 = 0$，这是相流的平衡位置，由于在矢量场等于零的点附近矢量方向改变一般是不连续，所以有时称这样的点为奇点，现在更通用的名称为临界点。

5. 相空间与轨线

设有微分方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{4.152}$$

或

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \tag{4.153}$$

相空间为 R^n，扩充空间为 $R \times R^n$。解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ 在相空间的图形，称为方程的轨线(orbit)，它显然是扩充空间内的解曲线在相空间 R^n 的投影。

给定了微分方程就等价于在相空间 R^n 的区域 D 内给定了矢量场 $\boldsymbol{f}$。当 $\boldsymbol{f}$ 不与 t 有关时，称为定常场或自治场，域 D 内任一点 $\boldsymbol{x}$ 确定着唯一的方向 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$，这时称方程(4.152)为自治系统(autonomous system)；当 $\boldsymbol{f}$ 不仅与 $\boldsymbol{x}$ 有关，而且还与 t 有关时，称为非自治场，方程(4.153)为非自治系统。在解的存在唯一性定理条件满足的前提下，对于自治系统(4.152)，不仅在扩充相空间中任意两条解曲线不相交，而且在相空间内其轨线也不会相交；但对于非自治系统(4.153)，尽管在扩充相空间内任意两条解曲线不相交，但在相空间中它的轨线可能会相交。这是自治系统和非自治系统最本质的差异。所以自治系统的研究一般放在相空间内进行，把 t 看作参数而去研究它的轨线的各种性质。

6. 自治系统的基本性质

考虑 $\boldsymbol{f}$ 在 D 内连续且满足利普希茨条件的自治系统。(4.152)式过初始点 $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$ 的解记为 $\boldsymbol{x}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0)$，过起始点 $(0, \boldsymbol{x}_0)$ 的解记为 $\boldsymbol{x}(t; 0, \boldsymbol{x}_0) \equiv \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0)$。解 $\boldsymbol{x}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0)$ 也可记

成 $\boldsymbol{x}(t-t_0;\ 0,\ \boldsymbol{x}_0)$ 或 $\boldsymbol{x}(t-t_0+t_1;\ t_1,\ \boldsymbol{x}_0)$。

性质 1 （平移性质）如果 $\boldsymbol{x}(t;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0)$是自治系统的解，那么 $\boldsymbol{x}(t+c;\ t_0,\ \boldsymbol{x}_0)$ 也是该系统的解，它经过初始点 $(t_0-c,\ \boldsymbol{x}_0)$，其中 c 为任意常数。

性质 2 设自治系统过$(0,\ \boldsymbol{x}_0)$的解为 $\boldsymbol{x}(t,\ \boldsymbol{x}_0)$，显然有 $\boldsymbol{x}(t_1,\ \boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{x}_1$；过$(0,\ \boldsymbol{x}_1)$的解为 $\boldsymbol{x}(t,\ \boldsymbol{x}_1)$，将 $\boldsymbol{x}_1$ 代入则有 $\boldsymbol{x}(t_2,\ \boldsymbol{x}(t_1,\ \boldsymbol{x}_0))=\boldsymbol{x}(t_1+t_2,\ \boldsymbol{x}_0)$。

性质 3 在相空间内自治系统的任何两条轨线不会相交。

证明 设自治系统的两条轨线为

$$\gamma_1:\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t;\ t_1,\ \boldsymbol{x}_1), \tag{4.154}$$

$$\gamma_2:\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t;\ t_2,\ \boldsymbol{x}_2)。 \tag{4.155}$$

利用反证假设，若 γ_1 与 γ_2 相交于相空间内一点，即

$$\boldsymbol{x}(T_1;\ t_1,\ \boldsymbol{x}_1)=\boldsymbol{x}(T_2;\ t_2,\ \boldsymbol{x}_2)=\bar{\boldsymbol{x}}, \tag{4.156}$$

则必有 $\gamma_1\equiv\gamma_2$，由于从扩充相空间的观点 $\boldsymbol{x}(t;\ t_1,\ \boldsymbol{x}_1)$平移后的 $\boldsymbol{x}(t-(T_1-T_2);\ t_1,\ \boldsymbol{x}_1)$ 也是自治系统的解，显然

$$\boldsymbol{x}(t-(T_1-T_2);\ t_1,\ \boldsymbol{x}_1)\big|_{t-T_2}=\bar{\boldsymbol{x}}, \tag{4.157}$$

即解 $\boldsymbol{x}(t-(T_1-T_2);\ t_1,\ \boldsymbol{x}_1)$ 过点$(T_2,\ \bar{\boldsymbol{x}})$；而根据假设解 $\boldsymbol{x}(t;\ t_2,\ \boldsymbol{x}_2)$ 也过点$(T_2,\ \bar{\boldsymbol{x}})$。据解的唯一性，有

$$\boldsymbol{x}(t-(T_1-T_2);\ t_1,\ \boldsymbol{x}_1)\big|_{t=T_2}\equiv\boldsymbol{x}(t;\ t_2,\ \boldsymbol{x}_2)。 \tag{4.158}$$

由于解 $\boldsymbol{x}(t-(T_2-T_1);\ t_1,\ \boldsymbol{x}_1)$ 与 $\boldsymbol{x}(t;\ t_1,\ \boldsymbol{x}_1)$ 有同一轨线 γ_1，所以 $\gamma_1\equiv\gamma_2$。证毕。

7. 临界点

自治系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{x}\in D\subset R^n$，并假设矢量函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在 D 中有零点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$，该点称为系统的临界点。在相空间中临界点能被看成为退化成一个点的轨线。临界点对应于一个定态解 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{a}$，此解不随时间 t 而变化，在增广相空间中表示一条平行于 t

轴的直线，它在相空间上的投影就是临界点 $\boldsymbol{a}$。

可以证明非临界点的轨线在任何有限时刻不能到达临界点，仅在无限时刻能趋向临界点，当 $t\to+\infty$ 时称轨线正向进入临界点，而 $t\to-\infty$ 时称负向进入临界点。事实上，若 $\lim\limits_{t\to\tilde{t}}\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{x}_0\neq\boldsymbol{a}$，并设 $\tilde{t}$ 有限，由连续性可知必有 $\boldsymbol{x}(\tilde{t},t_0,\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{a}$，那么 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 与 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ 都是过 $(\tilde{t},\boldsymbol{a})$ 的轨线，这导致与任意两条轨线不相交性矛盾。此外，还可以反过来证明无限时刻轨线所进入的点必为临界点。这是因为解 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 满足方程

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)/\mathrm{d}t\equiv f[\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)]。\tag{4.159}$$

两边求极限，并利用 $\boldsymbol{f}$ 的连续性，则有

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)/\mathrm{d}t=\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)]=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})。\tag{4.160}$$

若 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\neq 0$，则至少存在 $\boldsymbol{f}$ 的一个分量 f_i 使 $f_i(\boldsymbol{a})\neq 0$，不妨设 $f_i(\boldsymbol{a})>0$，则由上式可得一定存在 $T>0$ 使当 $t>T$ 时有

$$\mathrm{d}x_i(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)/\mathrm{d}t>f_i(\boldsymbol{a})/2>0。\tag{4.161}$$

因此，$\lim\limits_{t\to\infty}x_i(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)=+\infty$，与所设矛盾。同理可证明 $t\to-\infty$ 的情形。

8. 自治系统解的延拓性

若两个自治系统的轨线（包括临界点）除走向外完全相同，则称这两个自治系统是等价的。事实上，对于自治系统而言，主要研究的是其轨线的性态。因此研究某一自治系统与其等价系统是一样的。对于任一自治系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$，若 $\boldsymbol{f}$ 满足局部利普希茨条件，一定在域 D 内存在一个等价系统，使它的解的存在区间为 $(-\infty,+\infty)$。事实上，我们可以用下述方法构造等价系统，使 D 的边界 ∂D 上的点均为系统的临界点。由此，在研究自治系统的轨线结构及其渐进性态时，均设该系统的解关于时间可以无限延拓的。

9. 周期解

假设 $\boldsymbol{x}=\varphi(t)$ 是自治系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}\in D\subset\mathbf{R}^n$ 的解，T 是一个正数，使 $\varphi(t+T)=\varphi(t),\ t\in\mathbf{R}$，那么 φ 称为自治系统的周期为 T 的周期解。

可以证明，周期解对应于相空间中的闭轨线，同样相空间中的闭轨线必定对应于周期解。事实上，考虑相空间中的闭轨线 C 以及 C 上的一点 $\boldsymbol{x}_0$，方程的解 $\varphi(t)$ 在 $t=0$ 时从 $\boldsymbol{x}_0$ 出发并沿着轨线 C 演化。由于解的唯一性，C 不含有临界点，所以 $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|\geqslant\delta>0$，$\boldsymbol{x}\in C$。这蕴含 $|\dot{\boldsymbol{x}}|\geqslant\delta>0$ 以致在某一时刻 $t=T$，解回到 $\boldsymbol{x}_0$ 点。下面来证明对于所有的 $t\in R$ 有 $\varphi(t+\tau)=\varphi(t)$。依照自治系统解的平移性质，如果 $\varphi(t)$ 是具有初值 $\varphi(t_1)=\boldsymbol{x}_1$ 的解，那么 $\varphi(t-nT)$ 是具有初值 $\varphi(t_1+nT)=\boldsymbol{x}_1$ 的解。所以 $\varphi(t_1)=\varphi(t_1+nT)$，而 t_1 能取 $(0,\ T)$ 中的任意值，于是 $\varphi(t)$ 以 T 为周期。

10. 首次积分和首次流形

设区域 $D\subset R^n,\ \boldsymbol{x}\in D$，而 $\boldsymbol{f}$ 是切矢量，$\boldsymbol{f}\in TU_x$。设 $F:D\rightarrow R$ 是可微函数，$g:I\rightarrow D$ 是具有速度 $\boldsymbol{f}$ 且经过点 $\boldsymbol{x}$ 的任一确定的曲线，$\varphi(t)=\boldsymbol{x}$，那么区间 I 由实函数映射到实轴

$$(F\circ\boldsymbol{\varphi})(t)=F[\boldsymbol{\varphi}(t)]。\tag{4.162}$$

函数 F 沿矢量 $\boldsymbol{f}$ 的导数

$$L_fF\mid_x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mid_t F\circ\varphi=\frac{\partial F}{\partial x_1}f_1+\frac{\partial F}{\partial x_2}f_2+\cdots+\frac{\partial F}{\partial x_n}f_n,\tag{4.163}$$

称为矢量场 $\boldsymbol{f}$ 的方向导数。

设 $\mathscr{F}$ 表示所有无限次可微函数 $F:D\rightarrow R$ 组成的集合，由于函数相加保持可微性，可微函数的乘积仍然可微，所以 $\mathscr{F}$ 具有环的代数结构。从分析的观点看，$L_f:\mathscr{F}\rightarrow\mathscr{F}$ 为一阶线性齐次微分算子，在坐标 $x_1,\ \cdots,\ x_n$ 中，可写作为

$$L_f = f_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \cdots + f_n \frac{\partial F}{\partial x_n}。 \quad (4.164)$$

容易证明 $L_f L_g - L_g L_f$ 不是二阶的，而是一阶的，即

$$L_f L_g - L_g L_f = L_h。 \quad (4.165)$$

此处 $\boldsymbol{h}$ 是依赖于 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 的矢量场。用$[\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}]$表示的场 $\boldsymbol{h}$ 称为 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 的泊松(Poisson)括号，泊松括号李代数的线性、反对称性和雅可比恒等式三项基本要求，所以 $\mathscr{g}$ 形成一个李代数。从某一坐标系中矢量场 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 的分量出发，泊松括号的分量为

$$[\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}]_i = \sum_{j=1}^{n} \left(f_j \frac{\partial g_i}{\partial x_j} - g_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)。 \quad (4.166)$$

如果 F 沿矢量场 $\boldsymbol{f}$ 的方向导数等于零

$$L_f F - 0, \quad (4.167)$$

则称 F 为微分方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in D \quad (4.168)$$

的首次积分。依照上述定义，显然沿着每一个解 $\varphi: I \to D$，函数 F 是常数，即若 φ 是解，则函数 $F \circ \varphi: I \to R$ 是常数。另一方面，所谓函数 $F: D \to R$ 的水平集 H 是指点 $c \in H \subset R$ 的完全原像，即集合 $F^{-1}H \subset D$。每一条轨线属于且只属于函数 F 的一个水平集，而一个水平集对应于给定常数的 $F(\boldsymbol{x})$，所以它又被称作首次流形。

§4.6 临 界 点

1. 线性化

对于方程 $\dot{x} = -x^2 (t \geqslant 0)$，$x = 0$ 是一个临界点而 $x(t) = 0$ 是一个定态解。如果考虑在 $t = 0$ 时解的出发点 $x_0 \neq 0$ 的话，对于 $x_0 > 0$ 与 $x_0 < 0$ 定性与定量行为都是不同的两类解。这可以从它的解析解 $x(t) = (x_0^{-1} + t)^{-1}$，$x_0 \neq 0$ 中看出，当解在 $x_0 < 0$ 时，解在有限时间趋向无限。然而，对于方程 $\dot{x} = -x\ (t \geqslant 0)$，

$x=0$ 仍然是临界点，$x(t)=0$ 是定态解，所有 $x_0\neq 0$ 出发的解均具有 $x(t)\to 0$ 的渐近行为。在相空间中，这样的现象称为吸引(attraction)。

如果存在一个 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ 的邻域 $\Omega_a\subset R^n$，使得任一 $x(t_0)\in\Omega_a$ 蕴涵 $\lim\limits_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{a}$，那么称在 R^n 中方程 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的临界点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ 是正吸引子(positive attractor)；如果 $t\to-\infty$ 时临界点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ 具有这样的性质，则称为负吸引子(negative attractor)。

在分析定态解与临界点中，人们总是从临界点邻域内方程的线性化出发，即将 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ 的邻域内进行泰勒展开

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})+\text{高阶项},\tag{4.169}$$

那么具有常系数的线性化方程为

$$\dot{\boldsymbol{y}}=A\boldsymbol{y},\tag{4.170}$$

其中 $n\times n$ 矩阵

$$A=\left.\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial\boldsymbol{y}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}}。\tag{4.171}$$

(4.170)式已将临界点平移到原点。

为了确定线性系统临界点的性质，首先应当利用本征方程

$$\det(A-\lambda I)=0\tag{4.172}$$

确定矩阵 A 的本征值。存在一个实的非奇异矩阵 T 对 A 作相似变换，使得 $T^{-1}AT$ 成为若尔当形式。如果 n 个本征值是各不相同，那么 $T^{-1}AT$ 对角元是本征值的对角形式，如果某些本征值相同，线性变换 $\boldsymbol{y}=T\boldsymbol{z}$ 仍导致严格的分类。由于若尔当形式非常简单，通过它就能得到临界点及其对应相流的特性。

2. 线性平面自治系统

下面具体讨论平面线性系统的若尔当形式

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}。\tag{4.173}$$

当且仅当 2×2 矩阵 A 的行列式 $\det A\neq 0$ 时，系统(4.172)有唯一临界点 $O(0,0)$。利用非奇异线性变换

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix},\tag{4.174}$$

将系统(4.173)变为

$$\begin{pmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\end{pmatrix}=T^{-1}AT\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}。\tag{4.175}$$

二维矩阵的若尔当标准型有四种类型，

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 1 & \lambda_1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix},\tag{4.176}$$

其中 λ_1 和 λ_2 为本征方程 $\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=0$ 的两个不同实根，$\alpha\pm\beta\mathrm{i}$ 是一对共轭复根。利用这些记号，对于平面自治系统的临界点，可分成下述五种情形进行讨论。

(1) 两本征根为不同实根且同号

在 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}>0$，$(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}a_{21}>0$ 时，(4.175)式为

$$\begin{pmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 y_1\\ \lambda_2 y_2\end{pmatrix},\tag{4.177}$$

其通解为

$$y_1=c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t},\ y_2=c_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}。\tag{4.178}$$

当 $a_{11}+a_{22}<0$，即 $\lambda_1<0$，$\lambda_2<0$ 时，临界点 O 渐近稳定，除两条曲线外其余各解曲线都沿两个方向趋于 O 点。y_1 轴事实上含有三条轨线 $y_2=0$，$y_1>0$；$y_2=0$，$y_1<0$；$y_2=0$，$y_1=0$。同样，y_2 轴也含有三条轨线。由(4.178)式可得

$$k=\frac{y_1}{y_2}=\frac{c_2}{c_1}e^{(\lambda_2-\lambda_1)t},\tag{4.179}$$

当$\lambda_1>\lambda_2$时，$t\to+\infty$，$k\to 0$，所以除$y_2=0$外，其他轨线均切y_1轴趋于O点。当$\lambda_1<\lambda_2$时，$t\to+\infty$，$k\to\infty$，所以除$y_1=0$外，其他轨线均切y_2轴趋于O点。此时O点称为结点(node)。

对于A的本征根有负实部的情形，轨线均趋于O点，我们统称这样的O点为汇(convergence)；在A的本征根都有正实部的情形，轨线的箭头取相反的方向，也就是t增加时轨线向远离O点的方向运动，或者说$t\to-\infty$时轨线趋向于O点，我们将这样的O点称为源(source)。以下情形可仿此处理，不再赘述。

(2) 两特征根为重根

在$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}>0$，$(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}a_{21}=0$时，(4.175)式第一种可能形式为

$$\begin{pmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 y_1\\ y_1+\lambda_1 y_2\end{pmatrix},\tag{4.180}$$

其通解为

$$y_1=c_1e^{\lambda_1 t},\ y_2=(c_1t+c_2)e^{\lambda_1 t},\tag{4.181}$$

所以

$$\frac{y_2}{y_1}=\frac{c_1t+c_2}{c_1}\to+\infty\quad(t\to+\infty)。\tag{4.182}$$

且当$t=-\frac{c_2}{c_1}$时$y_2=0$，即轨线在$t=-\frac{c_2}{c_1}$过y_1轴，所以轨线均切y_2轴于O点，这时临界点称为退化结点。

在这种情形的第二种可能情形是(4.175)式为

$$\begin{pmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 y_1\\ \lambda_2 y_2\end{pmatrix},\tag{4.183}$$

其轨线方程显然满足

$$\frac{y_2}{y_1}=\frac{c_2}{c_1},\tag{4.184}$$

轨线均为进入或离开临界点 O 的半折线，这时称 O 点为临界结点。

(3) 两共轭复本征根，且实部不为零

在 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}>0$，$(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}a_{21}<0$ 时，(4.175)式为

$$\begin{pmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha y_1+\beta y_2\\ -\beta y_1+\alpha y_2\end{pmatrix},\ \alpha\neq 0,\tag{4.185}$$

作极坐标变换 $y_1=r\cos\theta$，$y_2=r\sin\theta$，可得

$$\begin{pmatrix}\dot{r}\\ \dot{\theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha r\\ -\beta\end{pmatrix}。\tag{4.186}$$

(4.186)式的通解为

$$r=c_1\mathrm{e}^{\alpha t},\ \theta=-\beta t+c_2,\ c_1>0。\tag{4.187}$$

容易看出，轨线为环绕 O 点的螺线。这时的临界点 O 称为焦点。$\alpha<0$ 稳定，$\alpha>0$ 不稳定；$\beta<0$，θ 逆时针旋转，$\beta>0$，θ 顺时针旋转。

(4) 本征根为共轭纯虚根

在 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}>0$，$a_{11}=-a_{22}$ 时，(4.175)式为

$$\begin{pmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta y_2\\ -\beta y_1\end{pmatrix},\tag{4.188}$$

轨线显然是以 O 点为中心的同心圆族。当 $\beta<0$ 时，轨线沿逆时针方向旋转；当 $\beta>0$ 时，轨线沿顺时针方向旋转。这时的临界点称为中心。

(5) 本征根与异号实根

在 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}<0$ 时，系统(4.175)仍为(4.177)式的形式，但这时 $\lambda_1\lambda_2<0$。$y_1=0$，$y_2=0$ 分别为轨线，但当 $t\to+\infty$ 时，或者 $y_1\to 0$，$y_2\to\infty$；或者 $y_1\to\infty$，$y_2\to 0$。这时奇点 O 称为鞍点(saddle)。

当线性系统(4.173)的临界点为汇时，是稳定的，并且当 $t\to+\infty$

时，轨线趋向于临界点，即也是渐近稳定的。中心是稳定的但不是渐近稳定的。源是不稳定的，鞍点也是不稳定的。

3. 非线性平面自治系统

设一般的平面系统

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_1(x_1,\ x_2)\\ P_2(x_1,\ x_2)\end{pmatrix},\tag{4.189}$$

其中 P_1，$P_2 \in C^1(D \subseteq R^2)$，且 $P_1(0,\ 0) = P_2(0,\ 0) = 0$，则(4.189)式可改写成

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + X_1(x_1,\ x_2)\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + X_2(x_1,\ x_2)\end{pmatrix},\tag{4.190}$$

其中 X_1，$X_2 = 0(r)$，$r = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$ 且 X_1，X_2 连续可微。若 $\det A = a_{11}a_{11} - a_{12}a_{21} \neq 0$，且称临界点 O 为初等的，否则称为高阶临界点。容易证明初等临界点必定是孤立的。

对于非线性系统(4.190)的临界点类型存在下述两条判定定理。

佩龙(Perron)定理 1 设系统(4.190)中的 X_1，X_2 满足条件(1)在 O 点邻域内有连续的一阶偏导数，(2)X_1，$X_2 = 0(r)$，那么在焦点、结点和鞍点的情况，非线性系统的临界点性质对应于线性系统的情形。

佩龙定理 2 设系统(4.190)中的 X_1，X_2 满足条件(1)在 O 点邻域内有连续的一阶偏导数，(2)X_1，$X_2 = 0(r^{1+\delta})$，δ 是任意固定的正数，那么在临界结点和退化结点的情形，非线性系统与线性系统的临界点类型也相对应。

当 X_1，X_2 在 O 点邻域内为解析函数时，佩龙定理的条件显然满足，这时上述各种类型的临界点完全由其线性化系统确定。佩龙定理讨论的非线性系统所对应的线性系统的两个本征根的实部不是零的情形，如果本征根为共轭纯虚根，即对应线性系统

的临界点为中心时，问题将会变得较为复杂。事实上，中心的结构是不稳定的，在加上非线性项后，中心可能保持为中心，也可能变成稳定或不稳定的焦点。在实际应用中，下述两条判定定理是比较有用的。

定理 3 设平面系统(4.189)所对应的线性系统以 O 为中心，且矢量场 $\boldsymbol{p}=(p_1, p_2)$ 关于 x_1 轴或 x_2 轴对称，则临界点 O 必为非线性系统的中心。

定理 4 对于系统(4.190)所对应的线性系统以临界点 O 为中心，且 X_1, X_2 在 O 点的 δ 邻域内解析，又若该系统在 δ 邻域内存在一个连续的首次积分，则 O 必为非线性系统的中心。

4. 细焦点及其形式展开判定方法

如果非线性系统的焦点是对应线性系统的中心，则此焦点称为该非线性系统的细焦点(fine focus)；如果非线性系统的焦点对应于线性系统的焦点，则称其为粗焦点(rough focus)。

在实际应用中，常使用一种称作形式展开法(formal expansion)的方法来判定细焦点。设平面系统(4.189)在 O 点的 δ 邻域内解析，且 O 点为对应的线性系统的中心，从而 O 只能是非线性系统的中心或焦点。现将 P_1, P_2 展开成幂级数，并进行适当的线性变换，可得

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum\limits_{j=1}^{\infty}X_{1j}(x_1, x_2)\\ \sum\limits_{j=1}^{\infty}X_{2j}(x_1, x_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y+\sum\limits_{j=2}^{\infty}X_{1j}(x_1, x_2)\\ -x+\sum\limits_{j=2}^{\infty}X_{2j}(x_1, x_2)\end{pmatrix}, \tag{4.191}$$

其中 X_{1j}, X_{2j} 均为 x_1 和 x_2 的 j 次齐次多项式。

依照定理 4，如果在 δ 邻域内能求得非线性系统(4.191)的首次积分，O 点必为该系统的中心，否则可以证明 O 点为细焦点。这个首次积分 $\Psi(x_1, x_2)=c$ 可以用形式级数法去发现，将

$\Psi(x_1, x_2)$ 写成幂级数的形式

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{i=2}^{\infty}\Psi_i(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + \sum_{i=3}^{\infty}\Psi_i(x_1, x_2)。 \tag{4.192}$$

如果 $\Psi(x_1, x_2) = c$ 是系统(4.191)的首次积分，那么将系统的解 $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$ 代入有 $\mathrm{d}\Psi[x_1(t), x_2(t)]/\mathrm{d}t \equiv 0$。如果逐次确定各次齐次多项式 $\Psi_i(x_1, x_2)$，$i = 3, 4, \cdots$，并证明所得的形式级数(4.192)式在 O 点的 δ 邻域内收敛，则 $\Psi(x_1, x_2)$ 即为所求的首次积分。Ψ 沿系统解 $\boldsymbol{x}(t)$ 对 t 的全导数

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Psi[x_1(t), x_2(t)] &= \sum_{\alpha=1}^{2}\Big(\sum_{i=2}^{\infty}\partial\psi_i/\partial x_\alpha\Big)\Big(\sum_{j=1}^{\infty}X_{\alpha i}\Big)\\ &\equiv \sum_{k=3}^{\infty}\sum_{\substack{i\geqslant 2\\ j\geqslant 1\\ i+j=k}}\Phi_{ij},\end{aligned} \tag{4.193}$$

其中

$$\Phi_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial\Psi_i}{\partial x_\alpha}X_{\alpha j}, \ i \geqslant 2, \ j \geqslant 1。 \tag{4.194}$$

首次积分存在性要求(4.193)式中各齐次多项式分别为零，即

$$\sum_{\substack{i\geqslant 2\\ j\geqslant 1\\ i+j=k}}\Phi_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\substack{i\geqslant 2\\ j\geqslant 1\\ i+j=k}}\frac{\partial\Psi_i}{\partial x_\alpha}X_{\alpha j} = 0, \ k = 3, 4, \cdots。 \tag{4.195}$$

利用 $\Psi_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ 和(4.195)式便可以得到 $\Psi(x_1, x_2)$ 的形式级数展开，可以证明该级数必定收敛，从而 O 为中心，若对于某一个 i，不能求出 F_i，那么非线性系统的临界点 O 为焦点。

利用上述方法来判定焦点或中心在实际问题中是比较实用的，但计算相当冗长，经常需要使用微机进行计算。我们在这里仅用一个简单例子来说明具体过程是如何实施的。考虑下述非线性自治系统

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\ -x_1+\beta x_1^2+\gamma x_1x_2^2-\alpha x_2^3\end{bmatrix}。\qquad(4.196)$$

系统(4.196)右边的函数解析，临界点 O 在对应的线性系统中为中心。现应用形式展开法

$$\Psi(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2+\Psi_3(x_1,x_2)+\Psi_4(x_1,x_2)+\cdots\qquad(4.197)$$

沿系统(4.196)的解求全导数得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}F/\mathrm{d}t&=(2x_1+\partial\Psi_3/\partial x_1+\partial\Psi_4/\partial x_1+\cdots)x_2\\&+(2x_2+\partial\Psi_3/\partial x_2+\partial\Psi_4/\partial x_2+\cdots)(-x_1+\beta x_1^2+\gamma x_1x_2^2-\alpha x_2^3)。\end{aligned}\qquad(4.198)$$

从 $\mathrm{d}F/\mathrm{d}t\equiv 0$ 的三次齐次多项式有

$$-x_2(\partial\Psi_3/\partial x_1)+x_1(\partial\Psi_3/\partial x_2)=2\beta x_1^2x_2\qquad(4.199)$$

作极坐标变换 $x_1=r\cos\theta$，$x_2=r\sin\theta$，$\Psi_3(x_1,x_2)\equiv r^3\Phi_3(\theta)$，则有

$$\begin{aligned}\partial[r^3\Phi_3(\theta)]/\partial\theta&=\partial\Psi_3/\partial\theta\\&=(-r\sin\theta)\partial\Psi_3/\partial x_1+(r\cos\theta)\partial\Psi_3/\partial x_2\\&=-x_2(\partial\Psi_3/\partial x_1)+x_1(\partial\Psi_3/\partial x_2)。\end{aligned}\qquad(4.200)$$

所以(4.199)式约化为

$$\partial\Phi_3(\theta)/\partial\theta=2\beta\cos^2\theta\sin\theta,\qquad(4.201)$$

从(4.201)式即可导出

$$\Psi_3(x_1,x_2)=r^3\Phi_3(\theta)=-\frac{2}{3}\beta x_1^3。\qquad(4.202)$$

继续考察 $\mathrm{d}F/\mathrm{d}t\equiv 0$ 的四次齐次多项式，可得

$$-x_2(\partial\Psi_4/\partial x_1)+x_1(\partial\Psi_4/\partial x_2)=2\gamma x_1x_2^3-2\alpha x_2^4,\qquad(4.203)$$

作极坐标变换 $\Psi_4(x_1,\ x_2)\equiv r^4\Phi_4(\theta)$，则有

$$\partial\Phi_4(\theta)/\partial\theta-2\gamma\cos\theta\sin^3\theta-2\alpha\sin^4\theta\equiv\Theta_4(\theta)。\tag{4.204}$$

积分(4.204)式，得

$$\begin{aligned}\Theta_4(\theta)&=-2\alpha\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2+2\gamma\cos\theta\sin^3\theta\\&=-\frac{3}{4}\alpha+\Theta_4^*(\theta),\end{aligned}$$

其中 $\Theta_4^*(\theta)$是周期为 2π 的函数，且在$[0,\ 2\pi]$上的积分值为零，但 $\Theta_4(\theta)$不存在周期为 2π 的解，容易看出

$$\partial\Phi_4(\theta)/\partial\theta=\Theta_4(\theta)+\frac{3}{4}\alpha\tag{4.205}$$

应有周期为 2π 的解，回到直角坐标即有

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=-\frac{3}{4}\alpha(x_1^2+x_2^2)+O(r^4)。$$

所以，当 $\alpha>0$ 时临界点为稳定的细焦点；当 $\alpha<0$ 时，为不稳定的细焦点。

5. 高维系统的临界点

考虑 n 维线性自治系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}\tag{4.206}$$

零解 $\boldsymbol{x}(t)=0$ 在相空间中的点对应的是系统的临界点。利用 A 的本征值和本征矢量将 A 化成若尔当标准型，即可判定临界点的稳定性以及临界点邻域内轨线的性态。

当 A 的本征值$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n$ 互不相同时，利用相似变换将 A 化为若尔当标准型后，即可求得解的表达式。在这种情形，$c_k\mathrm{e}^{\lambda_k t}$，$k=1,\ \cdots,\ n$ 是(4.206)式的 n 个独立解。例如

$$A=\begin{pmatrix}3&-2&0\\1&1&0\\0&0&3\end{pmatrix},\tag{4.207}$$

容易求得 A 有本征值 $\lambda_1 = 2+\mathrm{i}$, $\lambda_2 = 2-\mathrm{i}$, $\lambda_3 = -3$。利用非奇异矩阵

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.208}$$

可将 A 矩阵化为

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \tag{4.209}$$

由此而求得满足初值条件 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{c}$ 的解 $\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{T^{-1}AT}\boldsymbol{c}$ 为

$$\boldsymbol{x}(t) = T\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}\cos t & -\mathrm{e}^{2t}\sin t & 0 \\ \mathrm{e}^{2t}\sin t & \mathrm{e}^{2t}\cos t & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix}T^{-1}\boldsymbol{c}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}(\cos t + \sin t) & -2\mathrm{e}^{2t}\sin t & 0 \\ \mathrm{e}^{2t}\sin t & \mathrm{e}^{2t}(\cos t - \sin t) & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix}\boldsymbol{c}。 \tag{4.210}$$

根据(4.210)式,在临界点邻域的轨线性态很容易得到,显然临界点 O 是不稳定的。

当 A 的本征值 λ 具有 m 重退化时,解的形式就稍微复杂一些,m 个独立的解为

$$P_0\mathrm{e}^{\lambda t},\ P_1(t)\mathrm{e}^{\lambda t},\ P_2(t)\mathrm{e}^{\lambda t},\ \cdots,\ P_{m-1}(t)\mathrm{e}^{\lambda t}, \tag{4.211}$$

其中 $P_k(t)$, $k = 0, 1, \cdots, m-1$ 是 k 阶的多项式。例如

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.212}$$

容易求得 $\lambda = 1$ 是 A 的 4 重本征根,系统满足初值 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{c}$ 的

解为

$$x(t)=\begin{pmatrix}1-t-\frac{t^2}{2} & -2t-\frac{t^2}{2} & -t-\frac{t^2}{2} & -t-\frac{t^2}{2}\\ t & 1+t & t & t\\ \frac{t^2}{2} & t+\frac{t^2}{2} & 1+\frac{t^2}{2} & \frac{t^2}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}e^t c。\tag{4.213}$$

由解(4.213)容易看出，系统(4.212)的零解是不稳定的，且轨线先向四维空间中的 $x_4=0$ 相切，再向三维空间的 $x_2=0$ 相切，最后向 x_1x_3 平面上的 $x_1=-x_3$ 相切而进入临界点。

n 维线性系统的稳定性可以根据矩阵 A 的本征值实部的符号确定。设 A 是 $2m\times 2m$ 阶实矩阵，且有 $2m$ 个复本征值 $\lambda_1=\bar{\lambda}_1=\alpha_1+i\beta_1$，$\lambda_2=\bar{\lambda}_2=\alpha_2+i\beta_2$，…，$\lambda_m=\bar{\lambda}_m=\alpha_m+i\beta_m$，则存在 A 的一组广义本征矢量

$$w_j=\bar{w}=u_i+iv_j,\ j=1,2,\cdots,m,\tag{4.214}$$

使得 $\{u_1,v_1,u_2,v_2,\cdots,u_m,v_m\}$ 可作为 R^n 的基，可逆矩阵 $T=(v_1,u_1,v_2,u_2,\cdots,v_m,u_m)$ 使得

$$A=S+N,\ T^{-1}ST=D,\tag{4.215}$$

其中

$$D=\begin{pmatrix}D_1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & D_2 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & D_m\end{pmatrix},\ D_j=\begin{bmatrix}\alpha_j & -\beta_j\\ \beta_j & \alpha_j\end{bmatrix},\tag{4.216}$$

且 $N=A-S$ 是幂零矩阵(即对某个 k，要求 N^k 为零矩阵)，$NS=SN$。对于这样的线性自治系统，满足初值条件 $x(0)=c$ 的解可表示为

$$x(t)=TXT^{-1}\sum_{j=0}^{k}\frac{N^jt^j}{j!}c,\tag{4.217}$$

其中

$$X=\begin{pmatrix}X_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & X_2 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & X_m\end{pmatrix},\ X_j=\begin{pmatrix}e^{\alpha_j t}\cos\beta_j t & -e^{\alpha_j t}\sin\beta_j t\\ e^{\alpha_j t}\sin\beta_j t & e^{\alpha_j t}\cos\beta_j t\end{pmatrix}。\tag{4.218}$$

显然利用(4.217)式就可以方便地分析临界点的稳定性及临界点邻域范围内轨线的性状。

由于 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{v}_m\}$ 作为 R^n 中的一个基,根据本征值实部的符号,可将 R^n 分解为下述三个子空间:

$$\begin{aligned}E^s &= \mathrm{Span}\{\boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{v}_j \mid \alpha_j < 0\},\\ E^u &= \mathrm{Span}\{\boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{v}_j \mid \alpha_j > 0\},\\ E^c &= \mathrm{Span}\{\boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{v}_j \mid \alpha_j = 0\},\end{aligned}\tag{4.219}$$

它们分别对应临界点的稳定子空间、不稳定子空间和中心子空间,显然 $R^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$。

对于一般的非线性自治系统,我们不可能要求它有一个整体的稳定或不稳定分析,但可以在适当条件下得到局部范围内的结果。利用哈特曼-格罗布曼(Hartman-Grobman)定理,可知在线性化系统的临界点没有零实部本征根时,在临界点邻域内非线性系统与其线性化系统的轨线拓扑等价。事实上,平面系统作为一个特例,已经较详细地研究了这些性质,对于中心流形需要特殊处理。在实际问题应用中,这一类临界点的稳定性分析是十分重要的。

§4.7 宇宙动力学

1. 暗能量场

现代宇宙学的分水岭是从 1998 年超新星(SNeIa)的观测事实作为标志的。利用 SNeIa 超新星的视亮度为天文学家提供了

一条测量宇宙不同历史时期的膨胀速度的途径，1998年两个独立的观测组惊讶地发现宇宙的膨胀速度是在不断加快的，而不是以往爱因斯坦的广义相对论所预言的那样逐渐变慢。这就是人们发现暗能量的第一个征兆，暗能量导致一种与引力效应相抵消而推动各个星系相互远离的作用力。虽然超新星数据极具吸引力，但许多人在接受这一不寻常的想法时仍然有些犹豫。随后，不少天文学家行动起来，以各种独立的方式来检验这种排斥性的作用力是否真的存在。2003年，威尔金森微波各向异性探测器(WMAP)的宇宙微波背景(CMB)数据和斯隆数字巡天计划(SDSS)的星系结团数据以及其他几个观测结果一起，使暗能量存在问题得到了肯定的答案。结束了人们长达数十年之久的关于宇宙构成组分的争论，证实我们的宇宙比想象的更不寻常。宇宙只有百分之几为组成恒星、行星以及我们人类本身那样的普通物质，百分之二十几为天体物理学家所认为的由仍未被探知的粒子所组成的奇异物质(暗物质)，而剩下的百分之七十左右就是暗能量。

在理论上，最有可能的暗能量的候选者是一种被称作第五要素(quintessence)的标量场。所以在最近几年来，标量宇宙学得到了宇宙学家们的大量关注，并已得到了较丰富的成果。除此之外，暗能量主要候选者还有宇宙学常数、玻恩-因费尔德(Born-Infield)场、k要素(k-essence)和恰普雷金(Chaplygin)气体等。最近的观测表明暗能量的态方程参数 w 的范围可能小于 -1，该结果向传统的物理学提出了挑战，这是因为所有具有正则拉格朗日量的理论都有 $w>-1$ 的结论。天体物理学家提出了一种被称作phantom的非正则标量场模型，也引起了较多的讨论。

2. 弗里德曼-罗伯逊-沃克(Friedmann-Robertson-Walker)宇宙

在宇宙的尺度上，空间是均匀和各向同性的。所谓均匀，指空间不同点上的度规应没有区别；而各向同性，则是指从一点度量不同方向应没有区别。正是这两方面的要求，把度规的一般形式限定得非常简单，最一般的具有均匀和各向同性空间的四维时空度

规称为罗伯逊-沃克度规，它可以写作

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right\}, \qquad (4.220)$$

其中标度因子 $a(t)$ 可以是任意函数，$k = 1, 0, -1$ 分别对应闭、平坦和开宇宙。宇宙的具体运动情形应由动力学方程决定，在广义相对论中引力程方程

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}, \qquad (4.221)$$

其中 $g_{\mu\nu}$ 是时空度规，$R_{\mu\nu}$ 是里奇曲率张量，R 是曲率标量，而 $T_{\mu\nu}$ 是能动张量。

相应于空间是均匀和各向同性的时空，物质应是理想流体的形式。理想流体每一点的速度为 v，以此速度运动的观测者看到他周围的流体应是各向同性的。如将流体看成是连续介质，不对每个粒子作细致描写，而是用统计平均量温度 T、压力 p、密度 ρ 等来描述。在共动坐标系(comoving coordinates system) Σ' 中 $v = 0$，能动张量

$$T^{\mu\nu'} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}。 \qquad (4.222)$$

利用洛伦兹变换，回到静止坐标系，能动张量为

$$T^{\mu\nu} = -p g^{\mu\nu} + (\rho + p) u^\mu u^\nu, \qquad (4.223)$$

其中 u^μ 是流体的四维速度，$u^\mu = (1, 0, 0, 0)$。

将(4.220)和(4.223)式代入爱因斯坦方程(4.221)，可得时-时分量方程

$$3\ddot{a}/a = -4\pi G(\rho + 3p) \qquad (4.224)$$

和空-空分量方程

$$\ddot{a}/a + 2\dot{a}^2/a^2 + 2k/a^2 = 4\pi G(\rho - p)a^2, \qquad (4.225)$$

其他分量方程都为恒等式。用(4.224)和(4.225)式消去 $\ddot{a}$ 项，得到 a 的一阶微分方程

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{a^2}, \qquad (4.226)$$

其中哈勃(Hubble)参数 $H \equiv \dot{a}/a$，(4.226)式被称作弗里德曼方程。利用能动张量的守恒性 $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$，可得

$$\frac{d\rho}{da} + 3\left(\frac{p+\rho}{a}\right) = 0。 \qquad (4.227)$$

在上述四个方程中只有两个是独立的，但这些方程中涉及到三个未知函数 a，ρ 和 p，从而说明这些方程尚不完备。若对理想流体，即均匀和各向同性介质引入状态方程

$$p = p(\rho), \qquad (4.228)$$

就得到一组完备的动力学方程。

对于非相对论性介质，即介质粒子的热动能远小于它的静止能，则有 $p \ll \rho$，这种介质被称为尘埃(dust)物质。忽略热动能等于忽略压强，从(4.227)式解出 $\rho_m a^3 = \rho_{m0} a_0^3$。如果介质是相对论性的，则状态方程为 $p = \rho/3$。这种介质统称为辐射，由(4.227)式解得 $\rho_\gamma a^4 = \rho_{\gamma,0} a_0^4$。由于现时宇宙处于物质优势时期，观测数据表明

$$\rho_{\gamma,0}/\rho_{m,0} \approx 2 \times 10^{-4}, \qquad (4.229)$$

同时从两类物质的演化规律，有

$$\rho_\gamma/\rho_m = \rho_{\gamma,0}/(\rho_{m,0} a)。 \qquad (4.230)$$

(4.230)式表明往过去回溯，即 a 越小，辐射所占的比例越大。在宇宙均分(equipartition)时期 $\rho_m = \rho_\gamma$，宇宙的辐射密度与非相对论物质密度相等。在宇宙更早期，宇宙就处于辐射优势时期。

理论上宇宙的曲率因子 k 可以取正值、负值以及零值。将弗里德曼方程改写成

$$k = \frac{8\pi G a^2}{3}(\rho - \rho_c), \tag{4.231}$$

其中 $\rho_c \equiv 3H^2/8\pi G$ 称为临界密度，其值由哈勃参数决定。

由(4.231)式容易看出，k 的符号取决于实际密度 ρ 和临界密度的相对大小。定义两者之比为 $\Omega \equiv \rho/\rho_c$，它被称作宇宙学密度。当前的测量值

$$0.98 \leqslant \Omega \leqslant 1.08。 \tag{4.232}$$

这表明我们生活在一个具有临界密度的宇宙中，观测倾向于我们的宇宙是平坦的。

3. 标量宇宙学

在空间平坦的罗伯逊-沃克时空 ($c = 1$)，

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - a(t)^2 \mathrm{d}x_3^2, \tag{4.233}$$

存在 N 个标量场 ϕ_I ($I = 1, 2, \cdots, N$)，用 N 维内禀空间矢量记号表示

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix}。 \tag{4.234}$$

该标量有最一般的指数形式

$$V(\phi) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \mathrm{e}^{-\alpha_i \cdot \phi}, \tag{4.235}$$

其中 α_i ($i = 1, 2, \cdots, m$) 是 m 个 N 维矢量，β_i 是 m 个常数，可以取正值或负值，m 个矢量 α_i 组成一个 $m \times N$ 矩阵 α_{iI}。标量场 ϕ_I 的运动方程、弗里德曼方程和加速度方程分别为

$$\ddot{\phi}_I + 3H\dot{\phi}_I + \frac{\partial V}{\partial \phi_I} = 0, \tag{4.236}$$

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{6}(\dot{\phi} \cdot \dot{\phi} + 2V), \tag{4.237}$$

$$\dot{H} = -\frac{\kappa^2}{2}(\dot{\phi} \cdot \dot{\phi}), \tag{4.238}$$

其中 $\kappa^2 = 8\pi G$。在上述三个方程中，存在 $N+1$ 个自由度，即 N 个标量场 ϕ 和标度因子 a，所以仅有 $N+1$ 个方程是独立的，例如，可以选择弗里德曼与 N 个标量场方程。

在§4.5的讨论中，已经知道一个动力学系统的轨线的起始点和终点应是临界点，临界点描写了渐近行为。这样就存在着两类轨线：①异宿轨线(heteroclinic orbit)是联系两个不同的临界点的轨线；②同宿轨线(homoclinic orbit)是从一个临界点出发再回到自身的轨线。

具有多指数势的标量理论的优点在于它产生一个自洽系统，定义 $m+N$ 个新变量

$$x_I = \frac{\kappa}{\sqrt{6}H}\dot{\phi}, \tag{4.239}$$

$$y_i = \frac{\kappa\sqrt{\beta_i e^{-\alpha \cdot \varphi}}}{\sqrt{3}H}。 \tag{4.240}$$

在新变量下面，原方程组约化为

$$\frac{\dot{x}_I}{H} = -3y^2 x_I + \sqrt{3}\sum_{i-1}^{m} \alpha_{iI} y_i^2, \tag{4.241}$$

$$\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 = 1, \tag{4.242}$$

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -3\boldsymbol{x}^2, \tag{4.243}$$

其中 $\boldsymbol{x}^2 = \sum_{I=1}^{N} x_I^2$，$\boldsymbol{y}^2 = \sum_{i=1}^{m} y_i^2$。由(4.243)式，容易导出宇宙加速膨胀的条件是 $x^2 < \frac{1}{3}$。利用(4.240)式，可导出

$$\frac{\dot{y}_i}{H} = \sqrt{3}(\sqrt{3}x^2 - \alpha_i \cdot \boldsymbol{x})y_i。 \tag{4.244}$$

假定标度因子是严格单调的，所以可用变量 $N = \ln a$ 来代替宇宙

时间 t 作为演化参数。采用 N 变量后，将哈勃参量排除在标量运动方程和 $\dot{y}_i$ 的方程之外，从而极大地简化了标量宇宙学方程组：

$$\frac{\mathrm{d}x_I}{\mathrm{d}N}=-3y^2x_I+\sqrt{3}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{iI}y_i^2, \tag{4.245}$$

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}N}=\sqrt{3}(\sqrt{3}\boldsymbol{x}^2-\alpha_i\cdot\boldsymbol{x})y_i。 \tag{4.246}$$

临界点方程是 $(N+m)$ 个二次代数方程

$$(\sqrt{3}\boldsymbol{x}^2-\alpha_i\cdot\boldsymbol{x})y_i=0, \tag{4.247}$$

$$-3y^2x_I+\sqrt{3}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{iI}y_i^2=0。 \tag{4.248}$$

当所有 $y_i\neq 0$ 时，称该临界点为正解(proper solution)，而存在某些 i，y_i-0 的临界点称为非正解(non-proper solution)。当所有 y_i 均为零的特殊情形的非正解总是存在的，这时，$\boldsymbol{x}^2=1$，并因此而命名它为赤道(equator)，某些 y 为零的解对应于标量场取无限值，它们不是运动方程的正解，但是作为轨线的渐近行为是十分重要的。如用 y_i 为零的数目对临界点分类的话，易知最多存在着 2^m 类临界点。

矩阵 α_{iI} 的秩 R 对应于独立的 α_i 矢量数目，它给出了出现在势中标量场的有效数目。在适当地重新定义下，仅仅有 R 个场出现在势中，余下的 $(N-R)$ 个标量只出现动能部分，而它们在临界点的讨论时是退耦的。显然，在 $N>m$ 的情形必定会出现退耦的标量。标量场的重定义可以通过 SO(N)旋转来实现，因为任何 SO(N)转动将保持动能项不变(即 $\boldsymbol{x}^2$ 不变)并使 $\boldsymbol{\phi}$ 变成 $\boldsymbol{\phi}'$，$\alpha'_{iR+1}=\alpha'_{iR+2}=\cdots=\alpha'_{iN}=0$ (对所有的 i)。从(4.248)式可知，对于退耦标量场的临界点均为零 $x_{R+1}=x_{R+2}=\cdots=x_N=0$，所以仅需要考虑 $I-1, 2, \cdots, R$ 的情形。在 $R=m$ 情形，α_{iI} 是一个方阵，定义二次型矩阵

$$A_{ij}=\boldsymbol{\alpha}_i\cdot\boldsymbol{\alpha}_j。 \tag{4.249}$$

可以将一般的指数势分成 $\det A \neq 0$ 和 $\det A = 0$ 两类，前者对应于 $R = m$ 情形，而后者对应于 $R < m$ 的情形。

在 $R = m$ 情形，利用(4.242)式容易证明 $\dot{x}_I = 0$ 蕴含着 $\dot{y}_i = 0$。可以求得唯一的正临界点

$$x_I = \frac{\sqrt{3}p}{3p-1}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{iI}y_i^2, \tag{4.250}$$

$$y_i = \frac{3p-1}{3p^2}\sum_{j=1}^{m}(A^{-1})_{ij}, \tag{4.251}$$

其中 $p = (3x^2)^{-1}$，该临界点对应于宇宙膨胀的幂律解 $a(t) \sim t^p$。非正临界点对应于某些 y_i 为零，用指标 $a, b, c, \cdots$ 参数化非零 y 子集，也能导出相应的非正临界点

$$x_I = \frac{\sqrt{3}p}{3p-1}\sum_{a}\alpha_{aI}y_a^2, \tag{4.252}$$

$$y_a^2 = \frac{3p-1}{3p^2}\sum_{b}(A^{-1})_{ab}, \tag{4.253}$$

其中

$$p = \sum_{a,b}(A^{-1})_{ab}。 \tag{4.254}$$

在 $R < m$ 情形，一般的处理较繁复，这里仅指出不仅可能有幂律膨胀正临界点，而且会出现指数膨胀的所谓德·西特(de Sitter)临界点。

4. 双指数势宇宙动力学

在这里，考虑单标量场 ϕ 和理想流体的双指数势宇宙动力学。宇宙动力学系统

$$\dot{H} = -\frac{\kappa^2}{2}(\rho_r + p_r + \dot{\phi}^2), \tag{4.255}$$

$$\dot{\rho}_r = -3H(\rho_r + p_r), \tag{4.256}$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \tag{4.257}$$

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3}(\rho_r + \rho_\phi), \tag{4.258}$$

其中 $V(\phi) = \lambda_1 e^{-\alpha_1\phi} + \lambda_2 e^{-\alpha_2\phi}$，$\rho_r$ 是具有正压态方程 $p_r = (\gamma-1)\rho_\gamma$ 的理想流体密度，其中 $0 \leqslant \gamma \leqslant 2$ 是常数，与态参数的关系是 $w = \gamma - 1$。上点代表对宇宙时 t 的导数，撇代表对场 ϕ 的导数。$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)$ 而 $p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$ 是标量场的密度和压强，H 是哈勃参数。定义新的变量 $x = \frac{\kappa}{\sqrt{6}H}\dot{\phi}$，$y = \frac{\kappa\sqrt{\lambda_1 e^{-\alpha_1\phi}}}{\sqrt{3}H}$，$z = \frac{\kappa\sqrt{\lambda_2 e^{-\alpha_2\phi}}}{\sqrt{3}H}$，$\Gamma = \frac{V(\phi)V''(\phi)}{V'^2(\phi)}$ 和 $N = \ln a$，那么动力学系统可改写成

$$\frac{dx}{dN} = \frac{3}{2}x[\gamma(1-x^2-y^2-z^2)+2x^2] - \left[3x - \frac{1}{\kappa}\sqrt{\frac{3}{2}}(\alpha_1 y^2 + \alpha_2 z^2)\right], \tag{4.259}$$

$$\frac{dy}{dN} = \frac{3}{2}y[\gamma(1-x^2-y^2-z^2)+2x^2] - \frac{1}{\kappa}\sqrt{\frac{3}{2}}\alpha_1 xy, \tag{4.260}$$

$$\frac{dz}{dN} = \frac{3}{2}z[\gamma(1-x^2-y^2-z^2)+2x^2] - \frac{1}{\kappa}\sqrt{\frac{3}{2}}\alpha_2 xz, \tag{4.261}$$

并有约束方程

$$\Omega_\phi + \frac{\kappa^2\rho_\gamma}{3H^2} = 1, \tag{4.262}$$

其中

$$\Omega_\phi = \frac{\kappa^2\rho_\phi}{3H^2} = x^2 + y^2 + z^2。 \tag{4.263}$$

与单指数势情形不同，参数 Γ 是依赖于场 ϕ。标量场的态参数在新变量下可写成

$$w_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{x^2 - y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2}。 \tag{4.264}$$

通过标准步骤，求得临界点分类于表 4.1。

表 4.1

情况	临界点	Ω_ϕ	w_ϕ	稳定性
(i)	$\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\gamma\kappa}{\alpha_1}, \sqrt{\frac{3}{2}\frac{(2\gamma-\gamma^2)\kappa^2}{\alpha_1^2}}, 0$	$\frac{3\gamma\kappa^2}{\alpha_1^2}$	$\gamma-1$	稳定
(ii)	$\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\gamma\kappa}{\alpha_2}, 0, \sqrt{\frac{3}{2}\frac{(2\gamma-\gamma^2)\kappa^2}{\alpha_2^2}}$	$\frac{3\gamma\kappa^2}{\alpha_2^2}$	$\gamma-1$	稳定
(iii)	$\frac{\alpha_1}{\sqrt{6}\kappa}, \sqrt{1-\frac{\alpha_1^2}{6\kappa^2}}, 0$	1	$-1+\frac{\alpha_1^2}{3\kappa^2}$	稳定
(iv)	$\frac{\alpha_2}{\sqrt{6}\kappa}, 0, \sqrt{1-\frac{\alpha_2^2}{6\kappa^2}}$	1	$-1+\frac{\alpha_2^2}{3\kappa^2}$	稳定
(v)	$0, \left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \left(1-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{-\frac{1}{2}}$	1	-1	稳定
(vi)	$\pm 1, 0, 0$	1	1	不稳定

要求得宇宙动力学系统的解析解是困难的，但利用临界点的物理性质用数值方法可导出各类异宿轨线(图 4.3—图 4.5)。

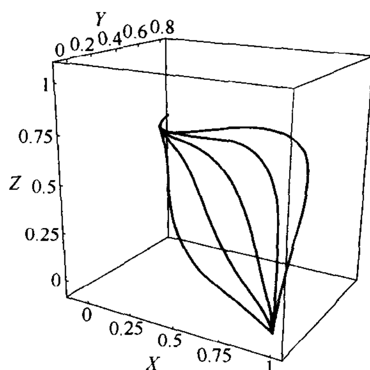


图 4.3

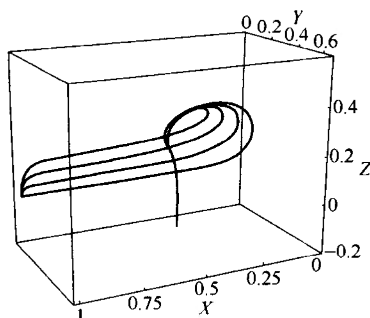


图 4.4

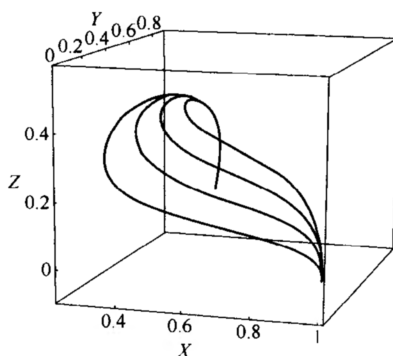


图 4.5

特别要指出的是，所谓的追踪(tracking)轨线联系动能优势临界点和追踪吸引子，它对宇宙学精细调节问题(fine tuning problem)的解决起到重要的作用。

[General Information]
书名=现代数学及其应用
作者=李新洲　徐建军著
页数=190
SS号=11624842
DX号=
出版日期=2006年03月第1版
出版社=上海科学技术出版社